EBS

수능개념 수학

명수샘의 고급진 레시피
미적분 Ⅰ



EBS
www.ebsi.co.kr

수능개념 수학

명수샘의 고급진 레시피

미적분 I





▶ 강사 **김명수** 선생님

약력

– 고양국제고등학교 교사

저서

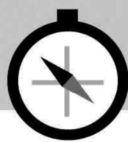
– 2007 개정 중학교 수학 교과서 집필

– 2009 개정 중학교, 고등학교 수학 교과서 집필

명수샘의 고급진 레시피

미적분 I





차례 CONTENTS

Ⅰ. 수열의 극한

A 수열의 극한

Aa. 수열의 수렴과 발산 … 6
Ab. 수열의 극한에 대한 기본 성질 … 8
Ac. 수열의 극한값의 계산 : $\frac{\infty}{\infty}$꼴 … 10
Ad. 수열의 극한값의 계산 : $\infty-\infty$꼴
Ae. 수열의 극한값의 대소 관계 … 13
Af. 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산 … 15
Ag. r^n을 포함한 식의 극한

B 급수

Ba. 급수의 수렴과 발산 … 20
Bb. 급수와 수열의 극한 사이의 관계 … 22
Bc. 급수의 성질
Bd. 등비급수의 수렴과 발산 … 25
Be. 등비급수의 수렴 조건
Bf. 등비급수의 활용 … 28

Ⅱ. 함수의 극한과 연속

C 함수의 극한

Ca. 함수의 극한 … 34
Cb. 우극한과 좌극한 … 35
Cc. 함수의 극한에 대한 성질 … 37
Cd. 함수의 극한값의 계산 : $\frac{0}{0}$꼴 … 40
Ce. 함수의 극한값의 계산 : $\frac{\infty}{\infty}$꼴, $\infty-\infty$꼴
Cf. 미정계수의 결정 … 42
Cg. 함수의 극한의 대소관계

D 함수의 연속

Da. 함수의 연속 … 48
Db. 연속함수
Dc. 연속함수의 성질 … 50
Dd. x^n이 포함된 함수의 연속
De. 사이값 정리 … 55

Ⅲ. 다항함수의 미분법

E 미분계수와 도함수

Ea. 평균변화율과 미분계수 … 58
Eb. 미분가능성과 연속 … 60
Ec. 도함수의 정의 … 62
Ed. 함수 $y=x^n$과 상수함수의 도함수
Ee. 함수의 실수배와 합, 차, 곱의 미분법

F 도함수의 활용 (1)

Fa. 접점의 좌표가 주어진 접선의 방정식 … 68
Fb. 기울기가 주어진 접선의 방정식
Fc. 곡선 위에 있지 않은 한 점이 주어진 접선의 방정식 … 70
Fd. 두 곡선에 동시에 접하는 직선의 방정식
Fe 롤의 정리 … 74
Ff. 평균값의 정리

G 도함수의 활용 (2)

Ga. 함수의 증가와 감소 … 78
Gb. 함수의 극대와 극소 … 80
Gc. 함수의 그래프 … 83
Gd. 함수의 최대와 최소 … 84
Ge. 방정식에의 활용 … 86
Gf. 삼차방정식에서 실근의 개수
Gg. 부등식에의 활용 … 88
Gh. 수직선 위를 움직이는 점의 속도와 가속도 … 91

Ⅳ. 다항함수의 적분법

H 부정적분과 정적분

Ha. 부정적분의 정의 … 96
Hb. 부정적분과 미분의 관계
Hc. 함수 $y=x^n$의 부정적분과 부정적분의 성질
Hd. 구분구적법 … 99
He. 정적분의 정의
Hf. 미적분의 기본정리 … 101
Hg. 대칭성이 있는 함수의 정적분 … 103
Hh. 정적분으로 표시된 함수의 미분과 극한 … 106
Hi. 정적분과 무한급수 … 109

I 정적분의 활용

Ia. 곡선과 x축 사이의 넓이 … 114
Ib. 곡선과 y축 사이의 넓이
Ic. 두 곡선 사이의 넓이 … 116
Id. 두 도형의 넓이가 같은 경우의 정적분 … 119
Ie. 역함수와 넓이의 관계
If. 직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리 … 122

수열의 극한



a. 수열의 수렴과 발산

b. 수열의 극한에 대한 기본 성질

c. 수열의 극한값의 계산: $\frac{\infty}{\infty}$꼴

d. 수열의 극한값의 계산: $\infty-\infty$꼴

당신의 상상 속에 어떠한 장애물도 두지 마라.

e. 수열의 극한값의 대소관계

f. 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산

g. r^n을 포함한 식의 극한

$\mathcal{A}$

$\mathcal{A}$. 수열의 극한



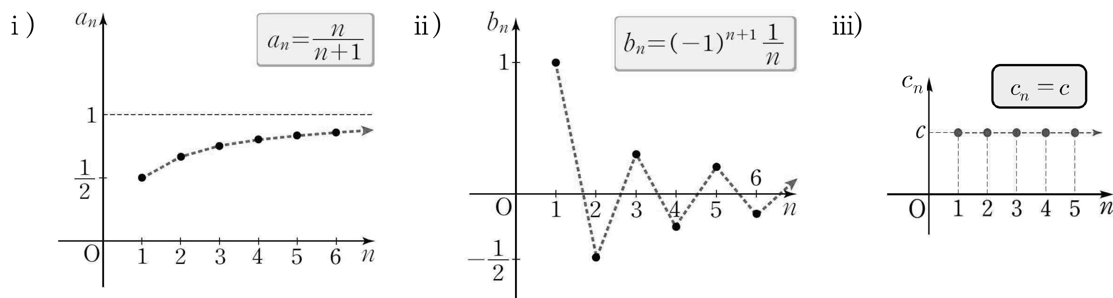
개념 NOTE

$\mathcal{A}a$. 수열의 수렴과 발산

(1) 수열의 수렴

수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값이 일정한 수 α에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 α에 **수렴**한다고 한다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 **극한값** 또는 **극한**이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.
(여기서 ∞는 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호로 **무한대**라고 읽는다.)

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \text{ 또는 } n \to \infty \text{일 때 } a_n \to \alpha$$



예 다음 수열 중 수렴하지 않는 것은?

① $\left\{\frac{2n+1}{n}\right\}$

② $\left\{2-\frac{1}{n}\right\}$

③ $\{1-(-1)^n\}$

④ $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

⑤ $\{(-1)^n+(-1)^{n+1}\}$

(2) **수열의 발산**

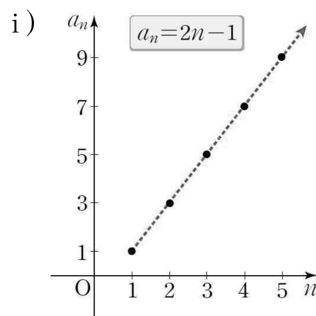
어떤 수열이 수렴하지 않을 때, 그 수열은 **발산**한다고 한다. 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때,

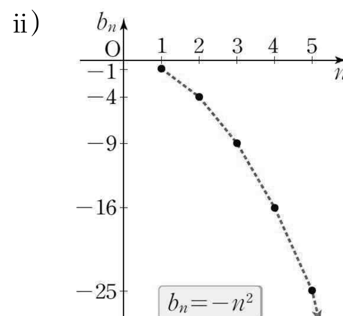
① a_n의 값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{또는} \quad n \to \infty \text{일 때 } a_n \to \infty$$

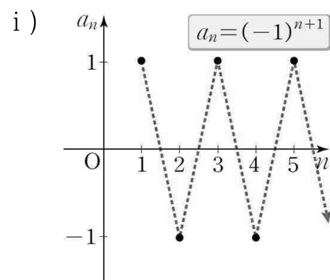
② a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산한다.

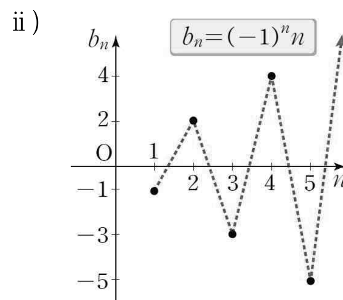
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{또는} \quad n \to \infty \text{일 때 } a_n \to -\infty$$

i) 

ii) 

③ a_n의 값이 일정한 수에 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으면 이 수열은 진동한다고 한다.

i) 

ii) 



Ab. 수열의 극한에 대한 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β는 실수)일 때,

① $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta$

② $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha - \beta$

③ $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = c\alpha$ (단, c는 상수)

④ $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

⑤ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)



유형 Q&A

A_01. 무한수열의 극한

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 5$, $a_7 = 13$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$의 값을 구하여라.

A_02. 극한값에 대한 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n + 2b_n) = 5$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 2$일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n - 2b_n)^2$의 값을 구하여라.

A_03. 수렴하는 수열에 대한 극한값의 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 5$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(a_n {b_n}^2 - 2a_n b_n + b_n - 2\right)$의 값을 구하여라.



개념 NOTE

Ac. 수열의 극한값의 계산 : $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴

분수식으로 주어진 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 수열 $\{a_n\}$의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누어 그 극한값을 구할 수 있다. 이때 분모, 분자의 차수에 따라 그 극한값은 다음과 같다.

① (분모의 차수)〉(분자의 차수)일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

② (분모의 차수)=(분자의 차수)일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n =$(최고차항의 계수의 비)

③ (분모의 차수)〈(분자의 차수)일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$



① $\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n^2+1} =$

② $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+5n-6}{3n^2-2n+1} =$

③ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3n^2+2} =$

Ad. 수열의 극한값의 계산 : $\infty - \infty$ 꼴

① 무리식은 유리화를 이용하여 식을 변형한 후 그 극한값을 구한다.

② 다항식은 최고차항으로 묶은 후에 수렴 또는 발산을 조사한다.



① $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n} - n\right) =$

② $\lim_{n\to\infty} (n^2-3n) =$

유형 Q&A

A_04. 수열의 극한값의 계산

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n+5)}{4n^2+3}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{3n^2-n}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n^2-2n+3}}$

(4) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}-\sqrt{1-\frac{5}{n}}\right)$

A_05. 복잡한 수열의 극한값의 계산

모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+n+1}$의 소수 부분을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

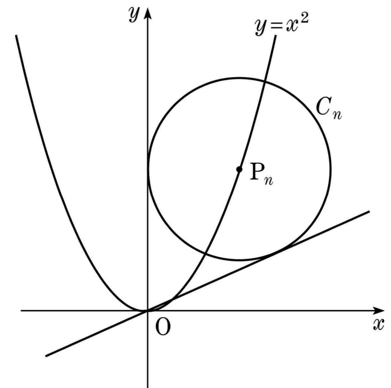


A_06. 기본성질을 이용한 극한값의 계산

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(2n+1)^2a_n=6$일 때, $\lim_{n\to\infty}(3n^2-4n)a_n$의 값을 구하여라.

A_07. 도형에서의 극한 중요!

자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(n,\ n^2)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원을 C_n이라 하자. 원점을 지나고 원 C_n에 접하는 직선 중에서 y축이 아닌 직선의 기울기를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하여라.



개념 NOTE

Ae. 수열의 극한값의 대소관계

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β는 실수)일 때,

① 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$

② 수열 $\{c_n\}$과 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

예) 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2n-1 < na_n < \dfrac{2n^2+n+3}{n}$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

A_08. 수열의 극한값의 대소관계

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2n < (n+1)^2 a_n < 2n+1$ 을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}(3n+4)a_n$의 값을 구하여라.

A_09. 극한의 성질의 참·거짓



두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n^{\ 2}=1$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=1$ 또는 $\lim_{n\to\infty} a_n=-1$ 이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha$ (α는 상수)이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$ 이다.

ㄷ. 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여 $a_n < c_n < b_n$ 이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} c_n$ 은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Af. 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산

(1) 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산

① $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

③ $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

④ $r\le-1$일 때, 진동한다. (발산)

(2) 등비수열 $\{ar^n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $a=0$ 또는 $-1<r\le 1$ 이다.



Ag. r^n을 포함한 식의 극한

r^n을 포함한 식의 극한값을 구할 때에는 다음의 경우로 나누어 조사한다.

① $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$임을 이용한다.

② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$임을 이용한다.

③ $r=-1$일 때, 수열 $\{r^n\}$이 진동하여 극한값이 존재하지 않는다.

④ $|r|>1$일 때, $0<\frac{1}{|r|}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$임을 이용한다.

예) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-3^n}{5^n+3^{n+1}}=$

유형 Q&A

$\mathcal{A}$_10. 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n+2}-3^{2n}}{4^n-3^{2n-1}}$ 의 값을 구하여라.

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a\times4^n-b\times3^{n+1}}{3^n+2^n}=6$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

(3) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=3^n+4^n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$ 의 값을 구하여라.

$\mathcal{A}$_11. 등비수열 $\{ar^n\}$의 수렴조건

수열 $\left\{\dfrac{(x+2)(2x-1)^n}{3^n}\right\}$이 수렴하기 위한 모든 정수 x의 값의 합을 구하여라.



A_12. r^n을 포함한 식의 극한



(1) $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+2x}{x^{n-1}+1}$에 대하여 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f(3)$의 값을 구하여라.

(2) 자연수 k에 대하여 $a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^{n}+1}$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}ka_k$의 값을 구하여라.

급수



a. 급수의 수렴과 발산

b. 급수와 수열의 극한 사이의 관계

c. 급수의 성질

d. 등비급수의 수렴과 발산

당신이 저지를 수 있는 가장 큰 실수는,

실수를 할까 두려워하는 것이다.

e. 등비급수의 수렴 조건

f. 등비급수의 활용

B

$\mathcal{B}$. 급수



개념 NOTE

$\mathcal{B}a$. 급수의 수렴과 발산

(1) 급수의 뜻

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례대로 덧셈 기호 +를 사용하여 연결한 식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

을 **급수**라고 하며, 이를 기호 Σ를 사용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 같이 나타낸다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$을 이 급수의 제$n$항까지의 **부분합**이라고 한다.

(2) 급수의 수렴과 발산

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 즉 $\lim_{n\to\infty} S_n=S$이면, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 수렴한다고 한다. 이때 S를 **급수의 합**이라 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S \text{ 또는 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$$

한편 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 이 급수는 발산한다고 한다.

또한, 급수가 발산할 때에는 그 합을 생각하지 않는다.



① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}=$

② $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)=$

유형Q&A

B_01. 급수의 합

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ 의 값을 구하여라.

(2) 자연수 n 에 대하여 직선 $x=n$ 이 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x+1}$ 과 만나는 점을 각각 A_n, B_n 이라 하자.

사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$ 의 넓이를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값을 구하여라.

 개념 NOTE

$\mathcal{B}b$. 급수와 수열의 극한 사이의 관계

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

(3) 명제 '$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다' 는 거짓이다.



$\mathcal{B}c$. 급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하고, 그 합을 각각 S, T라고 할 때,

① $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S + T$

② $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S - T$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n = cS$ (단, c는 상수)

유형 Q&A

$\mathcal{B}$_02. 급수와 수열의 극한 사이의 관계 중요!

(1) 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{2n+1}{n}\right) = 3$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3a_n - 2)$의 값을 구하여라.

(2) 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n} - 3\right) = 2$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n - 5}{3n+4}$의 값을 구하여라.

(3) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + 3) = 4$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - 2) = 5$일 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 5a_n b_n + \sum_{n=1}^{\infty}(2a_n + 3b_n)$의 값을 구하여라.



$\mathcal{B}$_03. 급수의 수렴과 발산의 판정

수렴하는 급수만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$　　ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}$　　ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

$\mathcal{B}$_04. 급수의 성질의 참·거짓

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-1)$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 모두 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

개념 NOTE

Bd. 등비급수의 수렴과 발산

(1) 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

을 첫째항이 a이고 공비가 r인 **등비급수**라고 한다.

(2) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots (a \neq 0)$은

① $|r| < 1$이면 수렴하고, 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.

② $|r| \geq 1$이면 발산한다.



예 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + (-1)^n}{4^n} =$

Be. 등비급수의 수렴조건

(1) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$의 수렴 조건 : $-1 < r < 1$

(2) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 수렴 조건 : $a = 0$ 또는 $-1 < r < 1$

유형 Q&A

B_05. 등비급수의 합 (1)

(1) 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=6$, $a_5=\frac{3}{4}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+2}$의 값을 구하여라.

(2) 자연수 n에 대하여 2^n을 3으로 나누었을 때의 나머지를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{2n-1}}{3^{2n-1}}+\frac{a_{2n}}{3^{2n}}\right)$의 값을 구하여라.

B_06. 등비급수의 합 (2)

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=4$, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n=12$일 때, a_3의 값을 구하여라.

B_07. 등비급수의 수렴조건

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+1}{3}\right)^n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}$이 모두 수렴하기 위한 실수 x의 값의 범위를 구하여라.

$\mathcal{B}$_08. 등비급수의 수렴과 발산의 판정 중요!

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비는 0 이 아니다.)

<보 기>

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ 이 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하고, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$과 수열 $\{b_n\}$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

개념 NOTE

Bf. 등비급수의 활용

(1) 등비급수의 합을 구하는 방법을 이용하여 순환소수를 분수로 나타낼 수 있다.

예) ① $0.\dot{2}=$

② $0.1\dot{3}=$

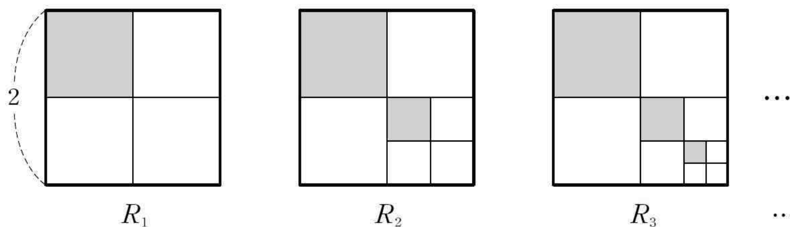
(2) 같은 꼴이 무한히 반복되는 도형에서 선분의 길이의 합, 도형의 넓이의 합, 좌표평면에서 수렴하는 점의 위치 등을 구하는 문제는 등비급수의 합을 이용하여 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

① 주어진 도형의 조건을 이해하고 n번째 도형에서의 한 변의 길이를 a_n이라 둔 후에 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 찾아 a_n을 구한다.

② 구하고자 하는 길이 또는 넓이의 첫째항 a와, 공비 $r(-1<r<1)$을 구한다.

③ 등비급수의 합의 공식 $\dfrac{a}{1-r}$에 대입한다.

예) 한 변의 길이가 2인 정사각형을 사등분하여 얻은 4개의 정사각형 중 하나를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 새로 얻은 정사각형 중 색칠되어 있지 않은 하나의 정사각형을 다시 사등분하여 얻은 4개의 정사각형 중 하나를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하여라.



유형 Q&A



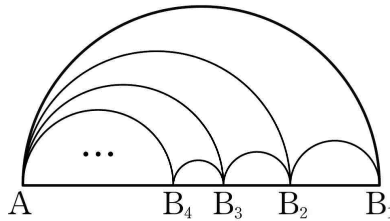
레시피

B_09. 등비급수의 활용 중요! ★★★

(1) 길이가 4인 선분 AB_1을 지름으로 하는 반원이 있다. 그림과 같이 선분 AB_1을 $3:1$로 내분하는 점을 B_2라 하고, 선분 AB_2와 선분 B_2B_1을 지름으로 하는 반원을 각각 그리고 새로 그려진 두 반원의 호 AB_2와 호 B_2B_1의 길이의 합을 l_1이라 하자.

선분 AB_2를 $3:1$로 내분하는 점을 B_3이라 하고, 선분 AB_3과 선분 B_3B_2를 지름으로 하는 반원을 각각 그리고 새로 그려진 두 반원의 호 AB_3과 호 B_3B_2의 길이의 합을 l_2라 하자.

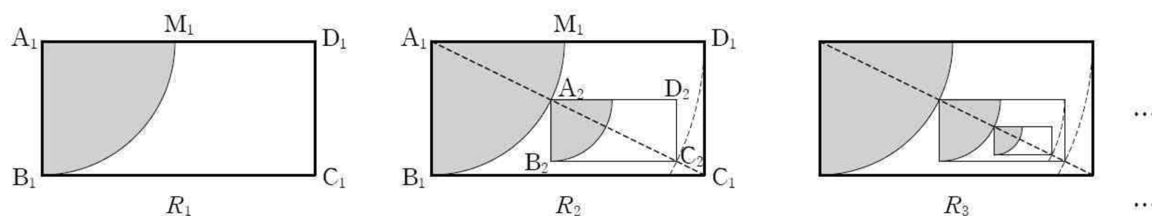
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 반원의 호 AB_{n+1}과 호$B_{n+1}B_n$의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값을 구하여라.



(2) 그림과 같이 $\overline{A_1D_1}=2$, $\overline{A_1B_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1D_1의 중점을 M_1이라 하자. 중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $A_1B_1M_1$을 그리고, 부채꼴 $A_1B_1M_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 부채꼴 $A_1B_1M_1$의 호 B_1M_1이 선분 A_1C_1과 만나는 점을 A_2라 하고, 중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1D_1}$인 원이 선분 A_1C_1과 만나는 점을 C_2라 하자. 가로와 세로의 길이의 비가 $2:1$이고 가로가 선분 A_1D_1과 평행한 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 부채꼴에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

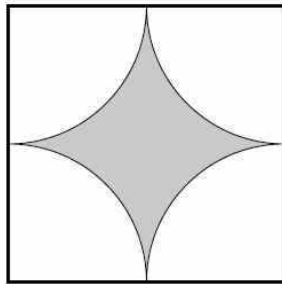
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하여라.

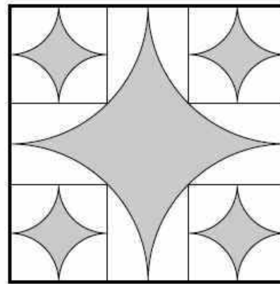


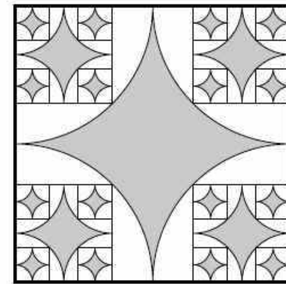
(3) 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형의 각 꼭짓점에서 중심각의 크기가 $90°$이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴을 그리고, 네 부채꼴의 외부와 정사각형 내부의 공통부분인 ✧ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 색칠된 부분을 포함하지 않는 네 부채꼴의 호 위의 한 점과 두 반지름 위의 세 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형 네 개를 그리고, 이 네 정사각형 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ✧ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하여라.


R_1


R_2


R_3

⋯

함수의 극한



a. 함수의 극한

b. 우극한과 좌극한

c. 함수의 극한에 대한 성질

d. 함수의 극한값의 계산: $\frac{0}{0}$꼴

낙관주의는 성공으로 인도하는 믿음이다.

희망과 자신감이 없으면 아무것도 이루어질 수 없다.

e. 함수의 극한값의 계산: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$꼴

f. 미정계수의 결정

g. 함수의 극한의 대소관계

C

C. 함수의 극한



개념 NOTE

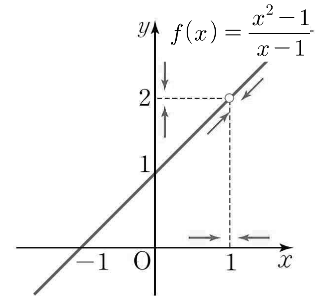
Ca. 함수의 극한

(1) 수렴

① 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ 또는 $x\to a$일 때, $f(x)\to L$

이때 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값 또는 극한이라고 한다.



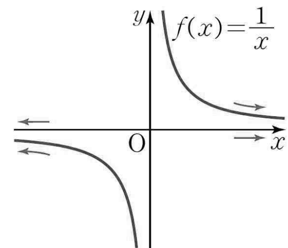
예 (1) $\lim_{x\to 0}(x^2-1)=$　　(2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=$

② 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ 또는 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to L$

또, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

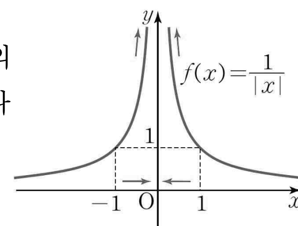
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ 또는 $x\to-\infty$일 때 $f(x)\to L$



(2) 발산

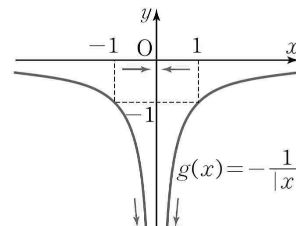
함수 $f(x)$에서 x의 값이 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to \infty$



또 함수 $g(x)$에서 x의 값이 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $g(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ 또는 $x \to a$일 때 $g(x) \to -\infty$



C6. 우극한과 좌극한

(1) 우극한

함수 $f(x)$에서 x가 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 L을 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 **우극한**이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to a+} f(x) = L$ 또는 $x \to a+$일 때 $f(x) \to L$

(2) 좌극한

함수 $f(x)$에서 x가 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지면 M을 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 **좌극한**이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to a-} f(x) = M$ 또는 $x \to a-$일 때 $f(x) \to M$

(3) 함수의 극한값의 존재성

$x=a$에서의 함수 $f(x)$의 극한값이 L이면, $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값은 모두 L이다. 역으로 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값이 L로 같으면, $\lim_{x \to a} f(x) = L$이다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L$$

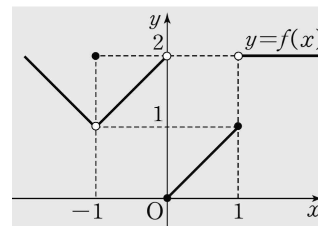
예 (1) $\lim_{x \to 2+} (x^2 - 4) =$ (2) $\lim_{x \to 1-} \frac{|x-1|}{x-1} =$

유형 Q&A

C_01. 함수의 수렴과 발산

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,

$\lim_{x \to -1} f(x) + \lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$ 의 값을 구하여라.



C_02. 우극한과 좌극한

(1) 함수 $f(x)=\dfrac{|x^2-9|}{x-3}$ 에 대하여 $\lim_{x \to 3+} f(x) + \lim_{x \to 3-} f(x)$의 값을 구하여라.

(2) 함수 $f(x)=\begin{cases} x-3 & (x \geq 1) \\ 2x^2-ax+1 & (x<1) \end{cases}$ 에 대하여 $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재할 때, $\lim_{x \to -1} f(x)$의 값을 구하여라.

(단, a는 상수이다.)

개념 NOTE

Cc. 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에서 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$($\alpha$, β는 실수)일 때,

① $\lim_{x \to a}\{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = \alpha + \beta$

② $\lim_{x \to a}\{f(x)-g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = \alpha - \beta$

③ $\lim_{x \to a} cf(x) = c\lim_{x \to a} f(x) = c\alpha$ (단, c는 상수)

④ $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = \alpha\beta$

⑤ $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta \neq 0$)

※ 참고 : 함수의 극한에 대한 성질은 극한값이 존재할 때만 성립한다.

함수의 극한에 대한 성질은 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$인 경우에도 성립한다.

유형 Q&A

C_03. 함수의 극한에 대한 성질

(1) 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{x}-2\right\}=0$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to0}\frac{5f(x)+ax}{3f(x)-4x}=7$이기 위한 상수 a의 값을 구하여라.

(2) 두 함수 $f(x)=\begin{cases}-x+2 & (x<1)\\ x+2 & (x\geq1)\end{cases}$, $g(x)=3x+a$에 대하여 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)



C_04. 함수의 극한에 대한 성질의 참·거짓

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 상수이다.)

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)=k$이면, $\lim_{x\to0}f(x+a)=k$이다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}(x-a)f(x)$, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}$의 값이 모두 존재하면 $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$의 값도 존재한다.

ㄷ. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}$, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}$의 값이 모두 존재하면 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값도 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

C_05. 합성함수의 극한 중요! ★★★

함수 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & (x\geq 0)\\ x^2-1 & (x<0)\end{cases}$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

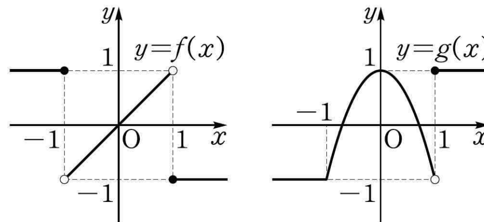
<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 0}\{f(x)\}^2=1$　　ㄴ. $\lim_{x\to 0}f(x^2)=1$　　ㄷ. $\lim_{x\to 0}f(x)f(-x)=-1$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

C_06. 합 또는 곱으로 나타내어진 함수의 극한 중요! ★★★

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=-1$　　ㄴ. $\lim_{x\to 1}\{f(x-2)+g(x)\}=0$　　ㄷ. $\lim_{x\to -1}\{f(x)+g(-x)\}=2$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념 NOTE

Cd. 함수의 극한값의 계산 $\frac{0}{0}$꼴

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$에서 $\lim_{x \to a} f(x)=0$, $\lim_{x \to a} g(x)=0$인 경우

① 분모와 분자를 각각 인수분해하여 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

② 분모 또는 분자에 무리식이 있을 때에는 무리식이 있는 쪽을 유리화한 다음 분모, 분자의 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

예) ① $\lim_{x \to 3} \frac{x^2+2x-15}{2x-6}=$ ② $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+3x+4}-2}=$

Ce. 함수의 극한값의 계산 $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$꼴

(1) 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to \infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to \infty} g(x)=\infty$일 때, $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$의 값은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누어 극한값을 구한다.

(2) $\lim_{x \to \infty} \{f(x)-g(x)\}$에서 $\lim_{x \to \infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to \infty} g(x)=\infty$인 경우

① $f(x)-g(x)$가 다항식이면 $f(x)-g(x)$의 최고차항으로 묶어 극한값을 구한다.

② $f(x)-g(x)$가 무리식이면 분모가 1인 분수식으로 생각하여 분자를 유리화한 후 극한값을 구한다.

예) ① $\lim_{x \to \infty} \frac{10x^2+3}{5x^2+x-1}=$ ② $\lim_{x \to \infty}(3x-x^2)=$

③ $\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+6x}-x)=$

유형 Q&A

C_07. $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값의 계산

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3-4x^2-5x}{x^2-1}$

(2) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x-10}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}$

C_08. $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to -\infty} \frac{6x+7}{\sqrt{x^2+2x}-x}$

(2) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+x}-2x}$

C_09. $0 \times \infty$ 꼴의 극한값의 계산

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 3} \frac{7}{x-3}\left(1-\frac{5}{x+2}\right)$

(2) $\lim_{x \to \infty} x(\sqrt{x^2+3}-x)$

개념 NOTE

Cf. 미정계수의 결정

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 실수)일 때

(1) $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

(2) $\lim_{x\to a}f(x)=0$이고 $\alpha\neq 0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이다.

예 (1) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+ax-3}-2}{x-1}=b$일 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}-2x\right)=5$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

Cg. 함수의 극한의 대소관계

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에서 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$(α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 x의 값에서

(1) $f(x)\leq g(x)$이면 $\alpha\leq\beta$

(2) 함수 $h(x)$에 대하여 $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

예 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $-x^2+2x-3\leq f(x)\leq x^2-2x-1$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 1}f(x)$의 값을 구하시오.

유형 Q&A



C_10. 미정계수의 결정

중요! ★★★

(1) 두 상수 a, b에 대하여

$$\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{b}\right)=-1$$

일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, $b>0$)

(2) 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1,\quad \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=1$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하여라.

(3) 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. 이때 $f(2)$의 값을 구하여라.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=0$	(나) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=4$

C_11. 함수의 극한의 대소관계

함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 부등식 $2x-1<f(x)<2x+5$을 만족시킬 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x^2)}{3x^2+1}$의 값을 구하여라.

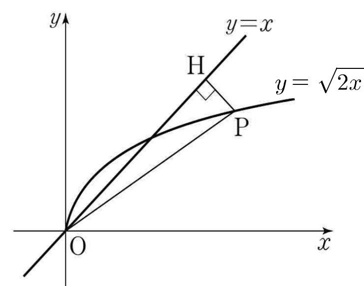
C_12. 그래프 또는 도형과 함수의 극한



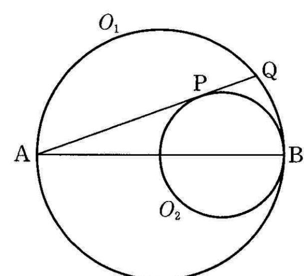
(1) 함수 $f(x)=|x^2-4x|$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 개수를 $g(a)$라 할 때,

$\lim_{a\to1}g(a)+\lim_{a\to4+}g(a)$의 값을 구하여라. (단, a는 실수)

(2) 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{2t})$에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 OPH의 외접원의 둘레의 길이를 $f(t)$라 하자. $\lim_{t\to\infty}\{f(t)-\pi t\}$의 값을 구하여라. (단, $t>2$이고, O는 원점이다.)



(3) 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O_1과 반지름의 길이가 r인 원 O_2가 점 B에서 내접하고 있다. 점 A에서 원 O_2에 그은 접선의 접점을 P, 이 접선이 원 O_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 Q라 할 때, $\lim_{r\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{r}$의 값을 구하여라.



함수의 연속



a. 함수의 연속
b. 연속함수
c. 연속함수의 성질
d. x^n이 포함된 함수의 연속

자신감은 성공으로 이끄는 제1의 비결이다.

e. **사이값 정리**

D

$\mathcal{D}$. 함수의 연속



개념 NOTE

$\mathcal{D}a$. 함수의 연속

(1) 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이라고 한다.

(i) $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(2) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, $f(x)$는 $x=a$에서 **불연속**이라고 한다.



$\mathcal{D}b$. 연속함수

(1) 구간

① 닫힌 구간 : $[a, b]=\{x|a \le x \le b\}$ ② 열린 구간 : $(a, b)=\{x|a < x < b\}$

③ 반닫힌 구간 또는 반열린 구간 : $[a, b)=\{x|a \le x < b\}$, $(a, b]=\{x|a < x \le b\}$

④ $(-\infty, a]=\{x|x \le a\}$, $(-\infty, a)=\{x|x < a\}$, $[a, \infty)=\{x|x \ge a\}$, $(a, \infty)=\{x|x > a\}$

⑤ 실수 전체의 집합도 하나의 구간이며, 기호로 $(-\infty, \infty)$와 같이 나타낸다.

(2) 연속함수

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수에 대하여 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다.
또, 일반적으로 함수 $f(x)$가 정의역 전체에서 연속일 때, 함수 $f(x)$를 **연속함수**라고 한다.

(3) 닫힌 구간에서 연속

함수 $f(x)$가 열린 구간 (a, b)에서 연속이고

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$$

일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이라고 한다.

유형 Q&A

D_01. 함수의 연속조건 중요!

(1) 함수 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+ax-6}{x-1} & (x \neq 1) \\ b & (x=1) \end{cases}$ 가 $x=1$ 에서 연속일 때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

(2) 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$(\sqrt{x}-1)f(x) = \sqrt{x+a} - \sqrt{3}$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

D_02. 함수의 불연속

실수 k에 대하여 직선 $y=x+k$와 곡선 $y=x^2-x$의 교점의 개수를 $f(k)$라 하면, 함수 $f(k)$는 $k=a$에서 불연속이다. 이때, 상수 a의 값을 구하여라.

개념 NOTE

Dc. 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

① $f(x)\pm g(x)$　　② $cf(x)$(단, c는 상수)

③ $f(x)g(x)$　　④ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

예) 두 함수 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x<2) \\ -x+5 & (x\geq 2) \end{cases}$, $g(x)=x^2-3x+k$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

Dd. x^n이 포함된 함수의 연속

$\lim_{n\to\infty} x^n$(n은 자연수)을 포함한 함수 $f(x)$의 연속성은 x의 값의 범위를

$$|x|<1,\ |x|>1,\ x=1,\ x=-1$$

인 경우로 구분하여 함수 $f(x)$를 구한 후 함수 $f(x)$의 연속성을 파악한다.

예) 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$이 연속인 구간을 조사하여라.

D_03. 함수의 합,곱의 연속성

중요! ★★★

(1) 함수 $f(x)=\begin{cases}3x+a & (x\geq 1)\\ x^2 & (x<1)\end{cases}$에 대하여 함수 $f(1+x)-f(1-x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하여라.

(2) 두 함수 $f(x)=ax^2-3x$, $g(x)=\begin{cases}a+4 & (x>1)\\ -a & (x\leq 1)\end{cases}$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값의 합을 구하여라.

$\mathcal{D}$_04. 연속과 관련된 명제의 참,거짓



함수 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2 & (x\le 0)\\ x-1 & (x>0)\end{cases}$ 에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 0이 아닌 임의의 실수 c에 대하여 $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0}f(x)f(-x)=-2$

ㄷ. 함수 $f(x)f(-x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$\mathcal{D}$_05. 연속이 되도록 하는 함수의 결정

함수 $f(x)=\begin{cases}2x-1 & (x\le 1)\\ -x & (x>1)\end{cases}$ 에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

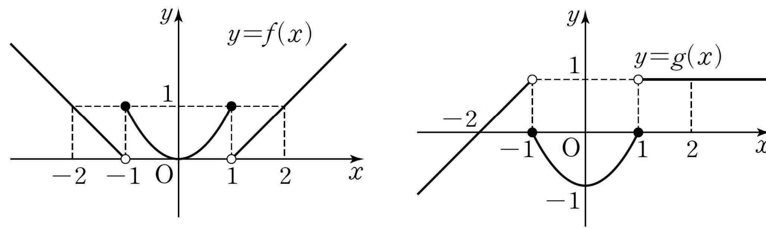
ㄱ. $g(x)=x^2+x-2$ ㄴ. $g(x)=x+1$ ㄷ. $g(x)=\begin{cases}x & (x\le 1)\\ -x & (x>1)\end{cases}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D_06. 그래프가 주어진 함수의 연속성

중요! ★★★

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to 1} \{f(x)+g(x)\}=1$

ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $\left(1+\frac{1}{x}\right)g(x)$ $(x \neq 0)$는 $x=-1$ 에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$\mathcal{D}$_07. 극한으로 정의된 함수의 연속성



(1) 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+3x}{x^{2n}+1}$ 가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하여라.(단, n은 자연수이다.)

(2) 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 함수

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1},\ h(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$와 함수 $f(x)h(x)$가 모두 연속함수일 때, $f(5)$의 값을 구하여라.

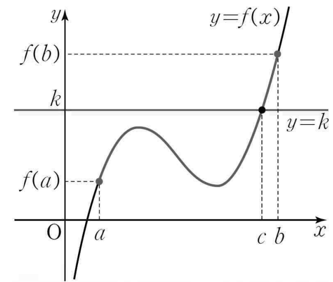
개념 NOTE

$\mathcal{D}e.$ 사이값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면,
$f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여

$$f(c)=k$$

인 c가 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.





유형 Q&A

$\mathcal{D}$_08. 사이값 정리의 활용

(1) 연속함수 $f(x)$가 모든 정수 n에 대하여 $f(2n)=1$이고 $f(2n-1)=-1$일 때, 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(0,\ 20)$에서 적어도 k개의 실근을 가진다. 이때 자연수 k의 값을 구하여라.

(2) 일차함수 $f(x)$가 $f(-1)=2k+3$, $f(1)=k-1$을 만족시킬 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=1$과 만나는 점의 x좌표가 -1과 1 사이의 값을 갖도록 하는 정수 k의 값의 개수를 구하여라.

미분계수와 도함수



a. 평균변화율과 미분계수

b. 미분가능성과 연속

c. 도함수의 정의

d. 함수 $y=x^n$과 상수함수의 도함수

할 수 있다고 믿는 사람은 그렇게 되고,

할 수 없다고 믿는 사람 역시 그렇게 된다.

e. 함수의 실수배와 합, 차, 곱의 미분법

E

$\mathcal{E}$. 미분계수와 도함수

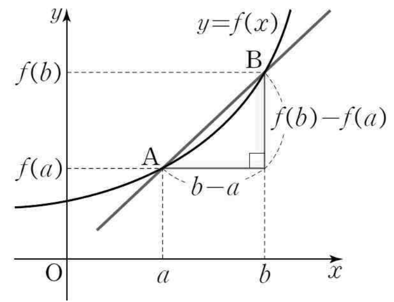


개념 NOTE

$\mathcal{E}a$. 평균변화율과 미분계수

(1) 평균변화율의 정의

① 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 함숫값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다. 이때 x의 값의 변화량 $b-a$를 x의 **증분**, y의 값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 y의 **증분**이라고 하며, 이것을 기호로 각각 $\varDelta x$, $\varDelta y$와 같이 나타낸다.



② 함수 $y=f(x)$에서 x의 증분 $\varDelta x$에 대한 y의 증분 $\varDelta y$의 비율

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x}$$

를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 **평균변화율**이라고 한다.

③ 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

예 함수 $f(x)=x^2$에서 x의 값이 1에서 b까지 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

(2) 미분계수의 정의

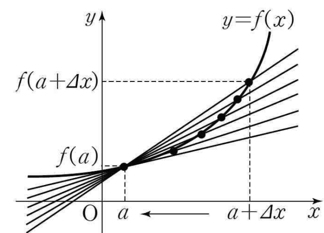
① 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\varDelta x$까지 변할 때의 평균변화율 $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x}$ 에서 $\varDelta x\to 0$일 때, 이 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x}$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**하다고 한다.

② 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 **순간변화율** 또는 **미분계수**라 하고 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.

③ 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.



예 함수 $f(x)=x^2$에서 $x=1$일 때의 미분계수를 구하여라.

유형 Q&A

E_01. 미분계수를 이용한 극한값의 계산

(1) 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(3)=1$일 때, $\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{h}$의 값을 구하여라.

(2) 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-4h)}{3h}=6$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기를 구하여라.



E_02. 복잡하게 주어진 식의 극한값의 계산 중요! ★★★

(1) 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 -2일 때, $\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x)}{x-1}$의 값을 구하여라.

(2) 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)+3}{h}=-4$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{xf(2)-f(2x)}{x-1}$의 값을 구하여라.

개념 NOTE

Eb. 미분가능성과 연속

(1) 미분가능

함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

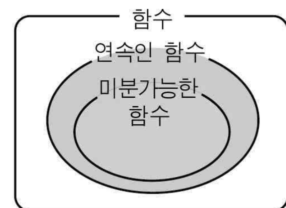
가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

(2) 미분가능한 함수

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다. 또한 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$를 미분가능한 함수라 한다.

(3) 미분가능과 연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. 그러나 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라고 해서 함수 $f(x)$가 항상 $x=a$에서 미분가능한 것은 아니다.



예) 함수 $f(x)=|x-1|$은 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 설명하여라.

유형 Q&A



E_03. 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 미분가능성



(1) 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax & (x<1) \\ bx^2+x+1 & (x\geq 1) \end{cases}$ 이 $x=1$ 에서 미분가능할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수이다.)

(2) $x>0$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3x^{n+2}+ax^2+bx}{x^n+1}$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

개념 NOTE

Ec. 도함수의 정의

(1) 도함수

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 정의역에 속하는 모든 원소 x에 미분계수 $f'(x)$를 대응시켜 만든

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

을 함수 $y=f(x)$의 **도함수**라고 하며, 기호로 $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$와 같이 나타낸다.

(2) 미분법

함수 $f(x)$에서 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 $f(x)$를 x에 대하여 미분한다고 하고, 그 계산법을 미분법이라고 한다. 또 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 도함수 $f'(x)$의 식에 $x=a$를 대입한 값이다.

Ed. 함수 $y=x^n$과 상수함수의 도함수

① $y=x^n$ (n은 자연수)이면 $y'=nx^{n-1}$

② $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

증명: ① $f(x)=x^n$ (n은 양의 정수)이라고 하면

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)-x\}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\{\underbrace{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}}_{n\text{개}}\}\\&=x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}=nx^{n-1}\end{aligned}$$

② $f(x)=c$(c는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}\\&=0\end{aligned}$$

Ee. 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법

(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

① $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

② $\{f(x)\pm g(x)\}'=f'(x)\pm g'(x)$

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

Ⅱ_04. 관계식이 주어진 경우의 도함수

다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)+5xy(x+y)$를 만족시킨다. $f'(0)=-3$일 때, $f'(n)>12$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하여라.

Ⅱ_05. 미분법의 공식

(1) 함수 $f(x)=2x^2+ax$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=6$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

(2) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(-1)=f(1)$, $f'(1)=2$를 만족시킬 때, $f'(2)$의 값을 구하여라.

$\mathcal{E}$_06. 곱의 미분법

(1) 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=4$를 만족시킬 때, 함수 $y=(3x-2)f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수를 구하여라.

(2) 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 미분가능하고 등식 $(x^2+1)f(x)=x^3+x+5$가 성립할 때, $f'(2)$의 값을 구하여라.

$\mathcal{E}$_07. 도함수를 이용한 다항식의 나눗셈

(1) 다항식 $x^{10}-x^2+1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(2)$의 값을 구하여라.

(2) 다항식 x^6+ax^2+b가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

E_08. 도함수를 이용하여 극한값 구하기



(1) 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=2,\ f'(1)=3$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{(x+1)f(x)-3x-1}{x-1}$의 값을 구하여라.

(2) 두 함수 $f(x)=2x^3-3,\ g(x)=-x^2+3x-1$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(3h)g(3h)-3}{h}$의 값을 구하여라.

도함수의 활용 (1)



a. 접점의 좌표가 주어진 접선의 방정식

b. 기울기가 주어진 접선의 방정식

c. 곡선 위에 있지 않은 한 점이 주어진 접선의 방정식

d. 두 곡선에 동시에 접하는 직선의 방정식

자신감은 위대한 과업의 첫째 요건이다.

e. 롤의 정리

f. 평균값의 정리

$\mathcal{F}$

$\mathcal{F}$. 도함수의 활용 (1)

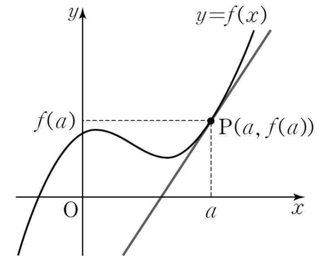


개념 NOTE

$\mathcal{F}a$. 접점의 좌표가 주어진 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선은 점 P를 지나고 기울기가 $f'(a)$인 직선이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$



예) 곡선 $y=x^2+x$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

$\mathcal{F}b$. 기울기가 주어진 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 기울기가 m이고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

① 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓는다.

② t에 대한 방정식 $f'(t)=m$을 만족시키는 실수 t의 값을 구한다.

③ 접선의 방정식 $y-f(t)=m(x-t)$를 구한다.

예) 곡선 $y=x^3$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식을 구하여라.

유형 Q&A

$\mathcal{F}$_01. 접점의 좌표가 주어진 접선의 방정식

(1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $y=2x-5$이다. 이때 곡선 $y=(x-1)f(x)$ 위의 x좌표가 3인 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(2) 곡선 $y=x^3-x^2+2$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선을 l이라 하고, 점 P를 지나고 직선 l에 수직인 직선을 m이라고 하자. 두 직선 l, m 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

$\mathcal{F}$_02. 기울기가 주어진 접선의 방정식

(1) 곡선 $f(x)=x^3-9x+14$의 제 1사분면 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x+b$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

(2) 곡선 $y=x^3-3x^2+x+1$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하다.
점 A의 x좌표가 3일 때, 점 B에서의 접선의 y절편의 값을 구하여라.

개념 NOTE

Fc. 곡선 위에 있지 않은 한 점이 주어진 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 (x_1, y_1)에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

① 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓는다.

② 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$를 구한다.

③ 점 (x_1, y_1)은 접선 위의 점이므로 ②에서 구한 방정식에 $x=x_1$, $y=y_1$을 대입한다.

④ t에 대한 방정식 $y_1-f(t)=f'(t)(x_1-t)$에서 실수 t의 값을 구한다.

⑤ ④에서 구한 실수 t의 값을 ②에서 구한 방정식에 대입하여 직선의 방정식을 구한다.

예) 점 $(1,\ 2)$에서 곡선 $y=-x^2+x+1$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

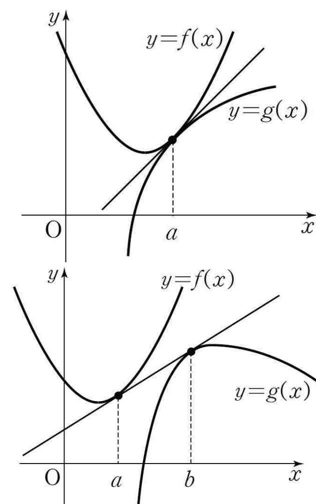
Fd. 두 곡선에 동시에 접하는 직선의 방정식

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 동시에 접하는 직선의 방정식은 다음과 같은 방법으로 구한다.

(1) 접점이 서로 일치하는 경우

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(a, g(a))$에서의 접선이 서로 일치할 때 다음이 성립한다.

① $f(a)=g(a)$ ② $f'(a)=g'(a)$



(2) 접점이 서로 다른 경우

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(b, g(b))$에서의 접선이 서로 일치할 때 다음이 성립한다.(단, $a\neq b$)

$$f'(a)=g'(b)=\frac{g(b)-f(a)}{b-a}$$

유형 Q&A



$\mathcal{F}$_03. 곡선밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

(1) 함수 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & (x<0)\\(x-1)^2 & (x\geq 0)\end{cases}$에 대하여 점 $\mathrm{P}(0,\ -8)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 APB의 넓이를 구하여라.

(2) 점 $(2,\ -2)$를 지나고 곡선 $y=x^3-2x^2-x+2$에 접하는 직선의 개수를 a, 모든 접점의 x좌표의 합을 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

$\mathcal{F}$_04. 접점이 같은 공통접선의 방정식

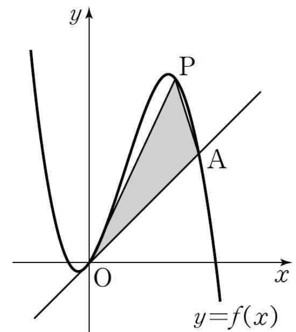
최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 두 곡선 $y=x^3-2x+1$, $y=f(x)$는 x의 좌표가 1인 점 P에서 만난다. 이 두 곡선 위의 점 P에서의 접선이 서로 일치할 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

$\mathcal{F}$_05. 접점이 다른 공통접선의 방정식

곡선 $y=x^3-4x+1$ 위의 점 $(-1,\ 4)$에서의 접선이 곡선 $y=x^2+ax+7$에 접할 때, 모든 실수 a의 값의 합을 구하여라.

$\mathcal{F}$_06. 접선의 방정식의 활용 중요! ★★★

(1) 삼차함수 $f(x)=-x^3+3x^2+2x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 원점 O에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$의 교점 중 원점 O가 아닌 점을 A라 하자. 점 P가 곡선 $y=f(x)$ 위에서 원점과 점 A사이를 움직일 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P의 x좌표를 구하여라.



(2) 함수 $f(x)=x^3-x^2+3x+1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $y=g(x)$ 위의 점 $(4,\ 1)$에서의 접선의 방정식이 $y=h(x)$이다. $h(8)$의 값을 구하여라.

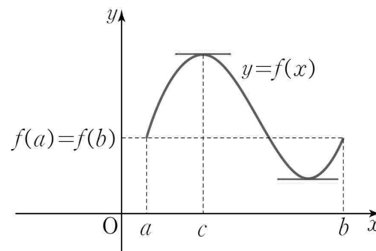
개념 NOTE

Fe. 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

$$f'(c)=0$$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



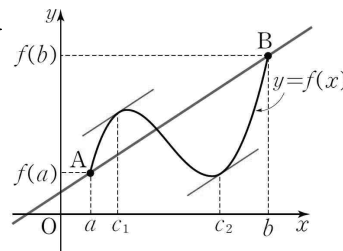
예) 함수 $f(x)=x^2-x-2$에 대하여 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 롤의 정리를 만족시키는 실수 c의 값을 구하여라.

Ff. 평균값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



예) 함수 $f(x)=x^3-3x^2$에 대하여 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 x의 값을 c라 할 때, 모든 실수 c의 값의 합을 구하여라..

$\mathcal{F}$_07. 평균값의 정리

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)=2$, $f(2)=5$일 때, 함수 $g(x)$를 $g(x)=(x+2)f(x)$로 정의한다. 함수 $g(x)$에 대하여 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수의 값을 a라고 할 때, $g'(a)$의 값을 구하여라.



$\mathcal{F}$_08. 평균값의 정리의 활용

미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\lvert f'(x) \rvert \le 3$이다.
(나) $f(0)=2$

도함수의 활용 (2)



a. 함수의 증가와 감소
b. 함수의 극대와 극소
c. 함수의 그래프
d. 함수의 최대와 최소
e. 방정식에의 활용

천재는 노력하기 때문에 어떤 분야에서 뛰어난 것이 아니다.

뛰어나기 때문에 그 분야에서 노력한다.

f. 삼차방정식에서 실근의 개수

g. 부등식에의 활용

h. 수직선 위를 움직이는 점의 속도와 가속도

G

$\mathcal{G}$. 도함수의 활용 (2)



개념 NOTE

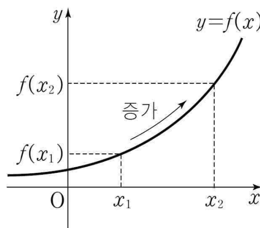
$\mathcal{G}a$. 함수의 증가와 감소

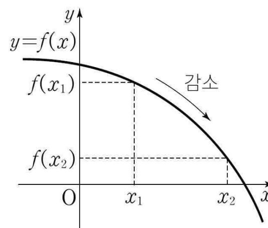
(1) 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면, 함수 $f(x)$는 이 구간에서 **증가**한다고 한다.

② $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이면, 함수 $f(x)$는 이 구간에서 **감소**한다고 한다.





(2) 도함수를 이용한 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.



(3) 함수의 증가, 감소와 도함수의 부호 사이의 관계

① $f(x)$가 증가하는 함수이면 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$

② $f(x)$가 감소하는 함수이면 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x) \leq 0$

예 함수 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$이 닫힌 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 감소할 때, α의 최솟값 m과 β의 최댓값 M에 대하여 $m^2 + M^2$의 값을 구하여라.

유형Q&A

G_01. 함수의 증가와 감소

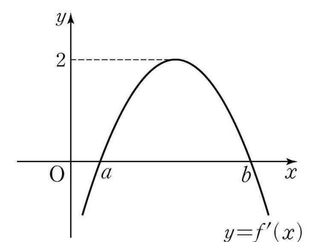
(1) 함수 $f(x)=x^3+ax^2+ax+1$이 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 모든 정수 a의 개수를 구하여라.

(2) 함수 $f(x)=-x^3+x^2+ax$가 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하여라.



G_02. 도함수를 이용한 함수의 증가와 감소

그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 두 점$(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$을 지나고, $f'(x)$의 최댓값은 2이다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a<b$)



<보 기>

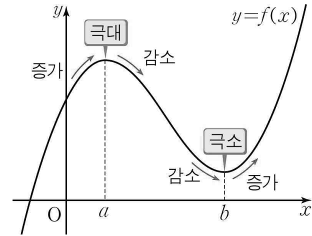
ㄱ. 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(a,\ b)$에서 증가한다.
ㄴ. 함수 $y=f(x)-x$가 열린 구간 $(c,\ d)$에서 증가하면 $d-c<b-a$이다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)-2x$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념 NOTE

Gb. 함수의 극대와 극소

(1) 함수의 극대와 극소의 뜻



함수 $f(x)$가 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여

① $f(x) \le f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**라 하고, $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다.

② $f(x) \ge f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**라 하고, $f(a)$를 **극솟값**이라고 한다.

③ 극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.



(2) 극값과 미분계수의 관계

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

(3) 함수의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서

① $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

예) 함수 $f(x)=2x^3-6x^2+3$의 극값을 구하여라.

유형 Q&A

G_03. 함수의 극대와 극소

(1) 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=(x^3+2)f(x)$를 만족시킨다. $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가질 때, $f(1)-f'(1)$의 값을 구하여라.

(2) 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+30$이 $x=-1$에서 극댓값 35를 가질 때, 이 함수의 극솟값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)



(3) 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. 

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다. (나) $x=2$에서 극솟값 -6을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값을 구하여라.

G_04. 함수가 극값을 갖기 위한 조건

(1) 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+2ax+3$이 극댓값을 갖도록 하는 자연수 a의 최솟값을 구하여라.

(2) 함수 $f(x)=x^3+kx^2+(k-2)x+3$이 $-1<x<1$인 범위에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 상수 k의 범위를 구하여라.



G_05. 함수가 극값을 갖지 않기 위한 조건

(1) 함수 $f(x)=x^3-ax^2+ax+3$의 역함수가 존재하도록 하는 모든 정수 a의 개수를 구하여라.

(2) 삼차함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+(a-2)x^2+ax+1$이 $x\le 0$에서 극값을 갖지 않도록 하는 상수 a의 범위를 구하여라.

개념 NOTE

Gc. 함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 방법으로 그린다.

① 도함수 $f'(x)$를 구한 후 $f'(x)=0$인 x의 값을 구한다.

② 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 조사한다.

③ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

예 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=x^3-3x^2+4$

(2) $y=x^3-6x^2+12x-5$

(3) $y=(x-1)^2(x-3)^2$

(4) $y=3x^4-4x^3+1$

Gd. 함수의 최대와 최소

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 최대·최소 정리에 의하여 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

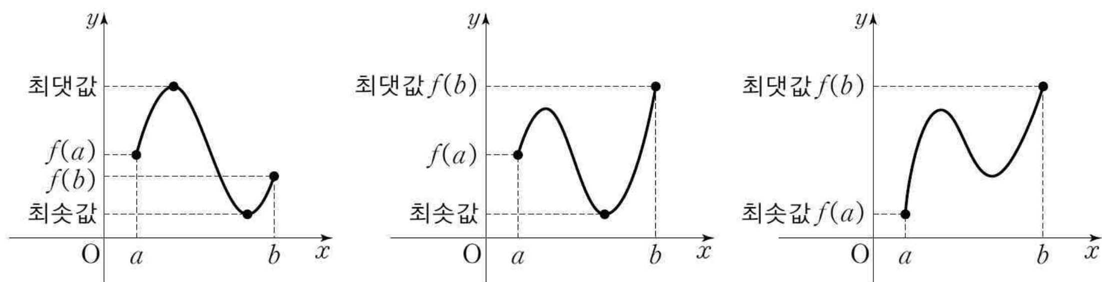
(2) 함수의 최댓값, 최솟값 구하기

닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

① 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서의 극댓값, 극솟값을 모두 구한다.

② 양 끝점에서의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 구한다.

③ 위의 ①, ②에서 구한 값 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.



(3) 함수의 최대와 최소의 활용

도형의 길이, 넓이, 부피 등의 최댓값 또는 최솟값은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

① 주어진 조건에 적합한 변수를 정하여 미지수 x로 놓고 x의 값의 범위를 조사한다.

② 도형의 길이, 넓이, 부피 등을 함수 $f(x)$로 나타낸다.

③ 함수의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

G_06. 함수의 최대와 최소

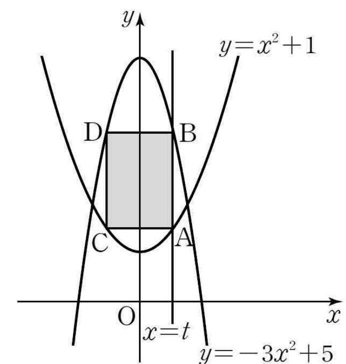
(1) 닫힌 구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=6$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.



(2) 함수 $f(x)=2x^3-3x^2+5\ (-1 \le x \le 1)$에 대하여 함수 $y=(f \circ f)(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

G_07. 함수의 최대와 최소의 활용

좌표평면에서 그림과 같이 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=x^2+1$, $y=-3x^2+5$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B를 지나고 y축에 수직인 직선이 두 곡선 $y=x^2+1$, $y=-3x^2+5$와 만나는 점을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ABDC의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, $0<t<1$)



개념 NOTE

Ge. 방정식에의 활용

방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표와 같다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수와 같다.

① 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수
함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 다음 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구한다.

② 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수
함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프를 그린 다음 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구한다.

③ 방정식 $f(x)=k$(k는 상수)의 실근의 개수
함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 다음 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수를 구한다.

예) 방정식 $3x^4-4x^3-12x^2-k=0$이 서로 다른 두 개의 실근의 개수를 갖기 위한 k의 범위를 구하여라.

Gf. 삼차방정식에서 실근의 개수

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 다음과 같다.

① (극댓값)×(극솟값)<0 ⇔ 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.
② (극댓값)×(극솟값)$=0$ ⇔ 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.
③ (극댓값)×(극솟값)>0 ⇔ 오직 한 개의 실근을 갖는다.



유형 Q&A



G_08. 방정식에의 활용 중요! ★★★

(1) x에 대한 방정식 $x^3-7=12x+a$가 서로 다른 두 개의 음의 근과 한 개의 양의 근을 가지도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하여라.

(2) 함수 $f(x)=x^3-3x-1$에 대하여 방정식 $|f(x)|=a$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 자연수 a의 값을 구하여라.

G_09. 극값을 이용한 삼차방정식의 실근의 개수

(1) x에 대한 삼차방정식 $2x^3+3x^2-12x-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가지도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하여라.

(2) 두 함수 $f(x)=2x^3+x^2-4x$, $g(x)=x^3-2x^2+5x+a$의 그래프가 서로 다른 세 점에 만나도록 하는 정수 a의 개수를 구하여라.

개념 NOTE

Gg. 부등식에의 활용

(1) 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq 0$이 성립함을 보이려면 그 구간에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보이면 된다.

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립함을 보이려면 그 구간에서 $f(x)-g(x) \geq 0$임을 보이면 된다.

예) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4-2x^2+4-n>0$이 성립하도록 하는 자연수 n을 모두 구하여라.

유형 Q&A

G_10. 부등식에의 활용

두 함수 $f(x)=4x^3-3x^2$, $g(x)=6x-a$에 대하여 $-1 \leq x \leq 2$일 때, $f(x) \geq g(x)$를 만족시키는 실수 a의 최솟값을 구하여라.



G_11. 도함수 $f'(x)$를 이용한 함수 $f(x)$의 해석 중요!

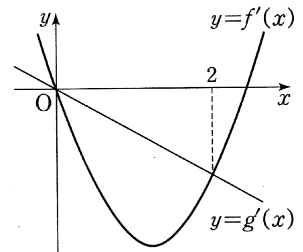
(1) 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+3x+5$ 에 대하여 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, a 는 상수이다.)

<보 기>

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(0,\ 5)$에서의 접선의 기울기는 3이다.
ㄴ. $a=-3$이면 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. $|a|\le 2$이면 함수 $f(x)$는 실수 전체에서 증가하는 함수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2) 삼차함수 $f(x)$의 도함수의 그래프와 이차함수 $g(x)$의 도함수의 그래프가 그림과 같다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. $f(0)=g(0)$일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

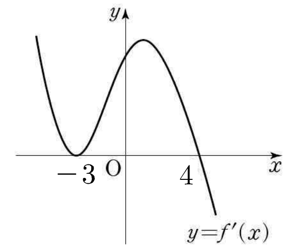


<보 기>

ㄱ. $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다.
ㄴ. $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(3) 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같이 $x=-3$에서 x축에 접하고, 점 $(4,\ 0)$을 지날 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값을 가진다.

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \leq f(-3)f(4)$가 성립한다.

ㄷ. $a \neq -3$일 때, $f(-3)=f(a)$를 만족시키는 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$는 구간 $(-a,\ \infty)$에서 항상 최댓값을 가진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념 NOTE

Gh. 수직선 위를 움직이는 점의 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 좌표 x로 나타내면 x는 t의 함수이다. 이 함수를 $x=f(t)$라 할 때, 시각 t에서의 순간변화율 $\frac{dx}{dt}$를 시각 t에서의 점 P의 속도라 하고 v로 나타낸다.

또, 속도 v의 순간변화율 $\frac{dv}{dt}$을 시각 t에서의 점 P의 가속도라고 하며 a로 나타낸다.

① $v=\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta x}{\varDelta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$

② $a=\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta v}{\varDelta t}=\frac{dv}{dt}$



예) 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치는

$x(t)=t^3-9t^2+27t$

이다. 점 P의 속도가 처음으로 3이 되는 순간, 점 P의 가속도를 구하여라.

유형 Q&A



G_12. 속도와 가속도

(1) 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치는 $x=t^3+pt^2+qt$라 한다. $t=2$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌고 그 위치가 -4일 때, $t=2$에서의 점 P의 가속도를 구하여라.
(단, p, q는 상수이다.)

(2) 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치가 각각

$$x_1(t)=t^3+2t,\quad x_2(t)=7t^2-4t$$

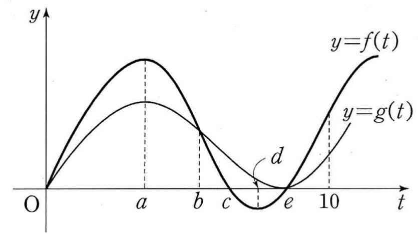
일 때, 두 점 P, Q가 원점을 동시에 출발한 후 두 번째로 만나는 순간, 점 P의 가속도를 구하여라.

(3) 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치는 각각

$$f(t)=2t^2-2t,\ g(t)=t^2-8t$$

이다. 두 점 P와 Q가 서로 반대 방향으로 움직이는 시각 t의 범위를 구하여라.

G_13. 그래프를 이용한 속도와 가속도의 해석 중요! ★★★



원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 A, B 의 t 초 후의 위치를 각각 $f(t)$, $g(t)$ 라 할 때, 두 함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$ 의 그래프가 그림과 같다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $f'(a)=f'(d)=0$, $g'(a)=g'(e)=0$)

〈보 기〉

ㄱ. 두 점 A, B는 $0<t<10$ 에서 두 번 만난다.
ㄴ. 점 B는 $b<t<e$ 에서 점 A의 오른쪽에 있다.
ㄷ. 두 점 A, B는 $d<t<e$ 에서 서로 반대 방향으로 움직인다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

부정적분과 정적분



a. 부정적분의 정의

b. 부정적분과 미분의 관계

c. 함수 $y=x^n$의 부정적분과 부정적분의 성질

d. 구분구적법

e. 정적분의 정의

나 자신에 대한 자신감을 잃으면

온 세상이 나의 적이 된다.

f. 미적분의 기본정리

g. 정적분으로 표시된 함수의 미분과 극한

h. 정적분과 무한급수

H

$\mathcal{H}$. 부정적분과 정적분



개념 NOTE

$\mathcal{H}a$. 부정적분의 정의

(1) 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉 $F'(x)=f(x)$일 때 $F(x)$를 $f(x)$의 **부정적분**이라고 한다. $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 한다.

(2) 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라 하면 $f(x)$의 임의의 부정적분은 $F(x)+C$ (C는 상수)의 꼴이 된다. 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\int f(x)dx=F(x)+C \ (C\text{는 적분상수})$$

$\mathcal{H}b$. 부정적분과 미분의 관계

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$

(2) $\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ (C는 상수)

$\mathcal{H}c$. 함수 $y=x^n$의 부정적분과 부정적분의 성질

(1) n이 음이 아닌 정수일 때, $\int x^n dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속일 때

① $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

② $\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

③ $\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

유형 Q&A

$\mathcal{H}$_01. 부정적분과 미분의 관계

(1) 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(3x^2-8x)\right\}dx$이고, $f(1)=-2$를 만족시킬 때, 방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합을 구하여라.

(2) 이차함수 $f(x)$와 그 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(x)=xf(x)-\frac{1}{3}x^3+2x^2+k$를 만족시킨다. $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하여라. (단, k는 상수이다.)

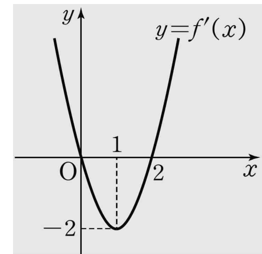
(3) 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 $g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$, $f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$을 만족시킬 때, $g(1)$의 값을 구하여라.



H_02. 도함수 $f'(x)$로부터 함수 $f(x)$구하기

(1) 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$f(1)=\dfrac{2}{3}$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하여라.



(2) 원점을 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^2-2x+a이다. 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합이 $\dfrac{8}{3}$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

개념 NOTE

Hd. 구분구적법

어떤 도형의 넓이 또는 부피를 구할 때, 주어진 도형을 잘게 나누어 간단한 도형의 넓이 또는 부피의 합의 극한값으로 구하는 방법을 **구분구적법**이라고 한다.

① 주어진 도형을 넓이 또는 부피를 알고 있는 작은 n개의 도형으로 분할한다.

② ①에서 구한 n개의 도형의 넓이 또는 부피의 합으로 근삿값을 구한다.

③ ②에서 구한 근삿값에 대하여 $n\to\infty$일 때의 극한값을 구한다.

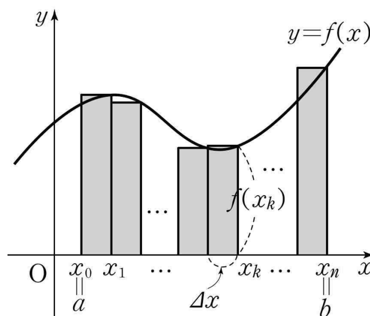
예) 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구분구적법을 이용하여 구하여라.

He. 정적분의 정의

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ (단, $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$, $x_k=a+k\Delta x$)

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$의 값을 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 **정적분**이라고 하고, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$를 a에서 b까지 적분한다고 한다.



유형 Q&A

$\mathcal{H}$_03. 구분구적법과 정적분의 정의

(1) 곡선 $y=x^3$과 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하자.

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)^3\frac{c}{n}$$

일 때, $a+b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 양의 정수이다.)

(2) 정적분의 정의에 의하여 $\int_1^3 x^2\,dx$의 값을 구하여라.

개념 NOTE

Hf. 미적분의 기본 정리

(1) 적분과 미분의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\ \text{(단, } a<x<b\text{)}$$

(2) 미적분의 기본 정리

닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$



(3) 정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

① $\int_a^a f(x)dx=0$

② $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

③ $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

④ $\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

함수 $f(x)$가 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

⑤ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$



유형Q&A

H_04. 정적분의 성질

(1) $\int_{0}^{1}(3x^2-2x+1)dx-\int_{2}^{1}(3x^2-2x+1)dx$의 값을 구하여라.

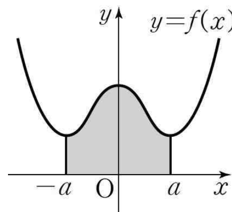
(2) $\int_{0}^{2}|x^2-x|dx$의 값을 구하여라.

(3) 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\begin{cases}4 & (x<1)\\ 6x+2 & (x>1)\end{cases}$이고 $f(1)=5$일 때, $\int_{0}^{2}f(x)dx$의 값을 구하여라.

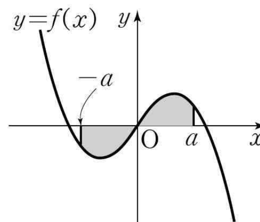
개념 NOTE

$\mathcal{H}_9$. 대칭성이 있는 함수의 정적분

(1) 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$



(2) 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



예) (1) $\int_{-1}^{1} (12x^5+3x^2+5x+2)dx=$

(2) 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이고 $\int_{0}^{2} f(x)dx=3$을 만족시킬 때,

$\int_{-2}^{2} (5-x)f(x)dx$의 값을 구하여라.

유형 Q&A



H_05. 대칭성을 이용한 함수의 정적분 중요! ★★★

(1) 함수 $f(x)=x+1$ 에 대하여 $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-1}^{1}f(x)dx\right)^2$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

(2) 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{4}f(x)dx$ 의 값을 구하여라.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)+f(x)=0$이 성립한다.
(나) $\int_{-3}^{2}f(x)dx=5$, $\int_{-2}^{4}f(x)dx=6$

(3) 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이다.
(나) 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 -2를 가진다.

$\int_{-1}^{1}(2x+3)\,|\,f'(x)\,|\,dx$ 의 값을 구하여라.

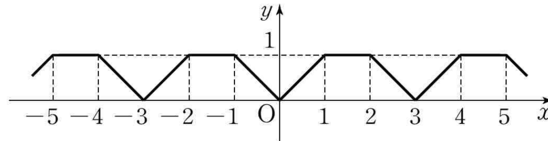


H_06. 평행이동과 주기성을 이용한 함수의 정적분



(1) 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시키고, $f(x)=\begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 1 & (1 \le x < 2) \\ -x+3 & (2 \le x < 3) \end{cases}$

이다. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 13$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.



(2) 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+2)=f(x), \quad f(x)-f(-x)=0$$

을 만족시키고 $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 3$일 때, $\int_{-6}^{10} f(x)\,dx$의 값을 구하여라.



H_07. 대칭이동을 이용하는 함수의 정적분

모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=x^2+2$를 만족시키는 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$의 값을 구하여라.

 개념 NOTE

Hh. 정적분으로 표시된 함수의 미분과 극한

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt = f(x) \ (\text{단, } a < x < b)$$

예) 함수 $f(x) = \int_{1}^{x} (t^2 + 3t)dt$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하여라.

(2) 연속함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여

① $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\int_{a}^{a+x} f(t)dt = f(a)$ ② $\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a}\int_{a}^{x} f(t)dt = f(a)$

예) 함수 $f(x) = x^3 - 5x$ 에 대하여 $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\int_{2}^{2+x} f(t)dt$ 의 값을 구하여라.

유형Q&A



H_08. 정적분으로 표시된 함수



(1) 함수 $f(x)=\int_{2}^{x}(t^3+t^2-3t)dt$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, a)$에서의 접선의 기울기가 b일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

(2) 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $xf(x)=3x^2+\int_{1}^{x}f(t)dt$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

(3) 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{0}^{x}f(t)dt=x^3-2x^2-2x\int_{0}^{1}f(t)dt$일 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

(4) 다항함수 $f(x)$가 $\int_{0}^{x}(x-t)f(t)\,dt=2x^3-3x^2$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

$\mathcal{H}$_09. 정적분으로 표시된 함수의 극한

(1) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \int_{1}^{x} (3t^2 + at - 5)dt = 8$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

(2) 함수 $f(x) = x^2 + 2x - 3$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2 - 4} \int_{2}^{x} f(t)dt$의 값을 구하여라.

(3) 함수 $f(x) = 2x^2 - 3x$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{2}^{2+3h} f(x)dx$의 값을 구하여라.

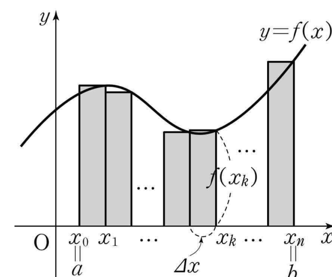
개념 NOTE

Hi. 정적분과 무한급수

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x=\int_a^b f(x)dx \left(\text{단, } \varDelta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\varDelta x\right)$$

이므로, 정적분을 이용하여 급수의 합을 구할 수 있다.



예 $f(x)=x^2-5x+4$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{3k}{n}\right)$의 값을 구하여라.

유형 Q&A



H_10. 정적분과 무한급수 중요! ★★★

(1) 함수 $f(x)=3x^2-ax$ 가 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{3k}{n}\right)=f(1)$ 을 만족시킬 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3+\left(1+\frac{4}{n}\right)^3+\left(1+\frac{6}{n}\right)^3+\cdots+\left(1+\frac{2n}{n}\right)^3\right\}$ 의 값을 구하여라.

(3) 함수 $f(x)=x^3+2x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$ 의 값을 구하여라.

(4) 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 함수 $f(x)=x^2$의 역함수를 $g(x)$라 하고, 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌 구간 $[0,\ 1]$을 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $0=x_0,\ x_1,\ x_2,\cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$이라 하자. 네 점 $(x_{k-1},\ 0)$, $(x_k,\ 0)$, $(x_k,\ 1)$, $(x_{k-1},\ g(x_{k-1}))$을 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이를 S_k $(k=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ n)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하여라. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

정적분의 활용



a. 곡선과 x축 사이의 넓이

b. 곡선과 y축 사이의 넓이

c. 두 곡선 사이의 넓이

d. 두 도형의 넓이가 같은 경우의 정적분

무엇이든 성취할 수 있다는 자신감,

이러한 열의 없이 위대한 일이 성취된 예는 없다.

e. 역함수와 넓이의 관계

f. 직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리

I

I. 정적분의 활용



개념 NOTE

Ia. 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{a}^{b}|f(x)|dx$$

예) 곡선 $y=(x-1)(x-3)$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

Ib. 곡선과 y축 사이의 넓이

함수 $g(y)$가 닫힌 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c,\ y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{c}^{d}|g(y)|dy$$

예) 곡선 $y=\sqrt{x}$와 y축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 구하여라.

유형 Q&A



I_01. 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

(1) 곡선 $y=x^3-x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

(2) 자연수 n에 대하여 곡선 $y=|x^2-n^2|$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^2}$의 값을 구하여라.

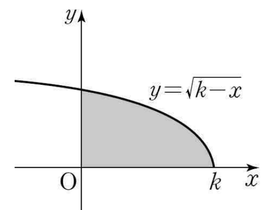
(3) 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(3)=0$이고,

$$\int_0^{2013}f(x)dx=\int_3^{2013}f(x)dx$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 S일 때, $30S$의 값을 구하여라.

I_02. 곡선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{k-x}$ $(k>0)$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 18일 때, 상수 k의 값을 구하여라.



개념 NOTE

Ic. 두 곡선 사이의 넓이

(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

(2) 두 함수 $f(y)$, $g(y)$가 닫힌 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 두 곡선 $x=f(y)$, $x=g(y)$ 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_c^d |f(y)-g(y)|dy$$

예) 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=-2x+3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

유형 Q&A

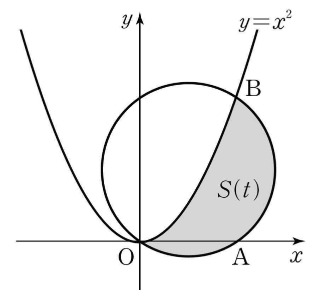


I_03. 두 곡선 사이의 넓이 중요!

(1) 두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=-x^2+4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(2) 곡선 $y=x^2-2x+3$과 이 곡선 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

(3) 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 양수 t에 대하여 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(t,\ 0)$, $\mathrm{B}(t,\ t^2)$을 지나는 원 C가 있다. 원 C의 내부와 부등식 $y \le x^2$이 나타내는 영역의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'(1)=\dfrac{p\pi+q}{4}$이다. p^2+q^2의 값을 구하여라. (단, p, q는 정수이다.)





I_04. 함수의 추론과 두 곡선 사이의 넓이



(1) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$	(나) $f(2)=0$

(2) 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
> (나) 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극솟값 0을 갖는다. (단, $\beta<0<\alpha$)

곡선 $y=f'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 32일 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

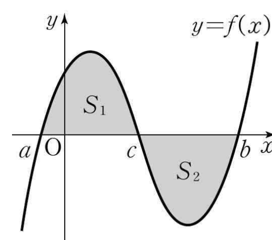
개념 NOTE

Id. 두 도형의 넓이가 같은 경우의 정적분

(1) 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면

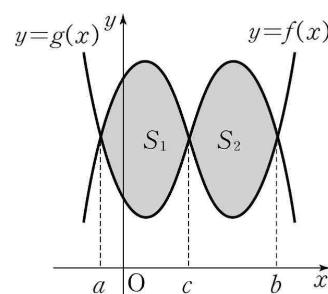
$$\int_a^b f(x)\,dx=0$$



(2) 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면

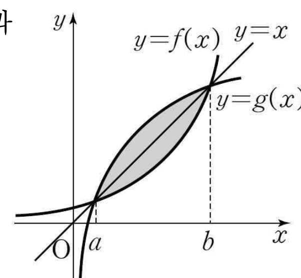
$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx=0$$



Ie. 역함수와 넓이의 관계

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 오른쪽 그림과 같이 만날때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=2\int_a^b |x-f(x)|\,dx$ (단, $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$)

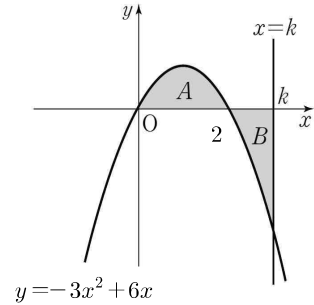


유형 Q&A

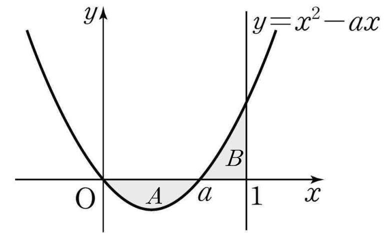


I_05. 두 도형의 넓이가 같은 경우의 정적분 중요! ★★★

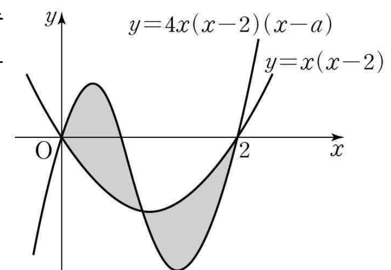
(1) 그림과 같이 곡선 $y=-3x^2+6x$ 와 x 축 및 직선 $x=k$ 로 둘러싸인 두 부분 A, B 의 넓이가 같을 때, 상수 k 의 값을 구하여라. (단, $k>2$)



(2) 그림과 같이 곡선 $y=x^2-ax$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형을 A, 곡선 $y=x^2-ax$ 와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형을 B 라고 하고 두 도형 A, B 의 넓이를 각각 S_A, S_B 라 하자. $S_A:S_B=2:1$ 일 때, 실수 a 의 값을 구하여라. (단, $0<a<1$ 이다.)



(3) 그림과 같이 삼차함수 $y=4x(x-2)(x-a)$ $(0<a<2)$ 와 이차함수 $y=x(x-2)$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만난다. 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같을 때, 상수 a 의 값을 구하여라.





I_06. 역함수의 그래프와 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이

(1) 함수 $y=x^3+x$ 의 역함수를 $y=g(x)$ 라 할 때, $\int_{2}^{10} g(x)\,dx$ 의 값을 구하여라.

(2) 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.
(나) $f(1)=2$, $f(4)=3$
(다) $\int_{1}^{4} f(x)dx=8$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{2}^{3} g(x)dx$의 값을 구하여라.

(3) 함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x$와 그 역함수 $g(x)$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

유형 Q&A

If. 직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0일 때,

① 시각 t에서 점 P의 위치 x는

$$x(t)=x_0+\int_a^t v(t)dt$$

② 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$x(b)-x(a)=\int_a^b v(t)dt$$

③ 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b |v(t)|dt$$

예) 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=t^2-t$일 때, 다음을 구하여라.

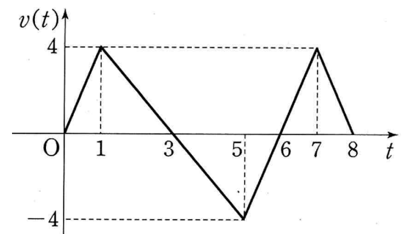
(1) 시각 $t=2$에서 점 P의 위치

(2) $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 실제로 움직인 거리

I_07. 속도와 위치 

(1) 30m 높이의 건물 옥상에서 공을 지면과 수직이 되도록 위로 쏘아 올릴 때, 시각 t초에서의 공의 속도는 $v(t)=30-10t$ (m/s)라 한다. 지면으로부터 공의 최대 높이를 $a\text{m}$, 공을 쏘아 올린 지 5초 후의 지면으로부터 공의 높이를 $b\text{m}$라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

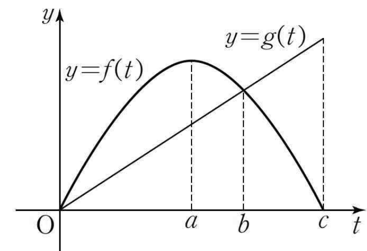
(2) 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(0 \le t \le 8)$에서의 속도 $v(t)$를 나타내는 그래프가 그림과 같다. 점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각을 a, 출발 후 원점에서 가장 멀리 떨어져 있을 때의 위치를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.



(3) 같은 높이의 지면에서 동시에 출발하여 지면과 수직인 방향으로 올라가는 두 물체 A, B가 있다. 그림은 시각 $t(0 \le t \le c)$에서 물체 A의 속도 $f(t)$와 물체 B의 속도 $g(t)$를 나타낸 것이다.

$$\int_0^c f(t)dt = \int_0^c g(t)dt$$

이고 $0 \le t \le c$일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다.
ㄴ. $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다.
ㄷ. $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.

① ㄴ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답과 해설





A. 수열의 극한

▶ A_01 정답 : 2

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=5$ …… ㉠

$a_7=a+6d=13$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$a_7-a_3=4d=8$ $\therefore d=2$

$d=2$를 ㉠에 대입하면

$a+4=5$ $\therefore a=1$

따라서 $a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$ $(n\geq 1)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2$$

▶ A_02 정답 : 9

두 수열 $\{a_n+2b_n\}$과 $\{a_nb_n\}$이 각각 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)^2=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+2b_n)^2-8a_nb_n\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+2b_n)(a_n+2b_n)-8a_nb_n\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)(a_n+2b_n)-8\lim_{n\to\infty}a_nb_n$$
$$=5^2-8\times 2=9$$

▶ A_03 정답 : -12

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ 이고 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_nb_n\times\frac{1}{a_n}=5\times 0=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(a_nb_n{}^2-2a_nb_n+b_n-2\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{a_nb_n(b_n-2)+(b_n-2)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{(a_nb_n+1)(b_n-2)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_nb_n+1)\times\lim_{n\to\infty}(b_n-2)$$
$$=(5+1)\times(0-2)=-12$$

▶ A_04 정답 : (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) 1 (4) 6

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n+5)}{4n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-5}{4n^2+3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{4+\frac{3}{n^2}}=\frac{2+0-0}{4+0}=\frac{1}{2}$$

(2) $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{3n^2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{3n^2-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{6n^2-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{6-\frac{2}{n}}=\frac{1}{6}$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2-2n+3}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-2n+3}}{(n-\sqrt{n^2-2n+3})(n+\sqrt{n^2-2n+3})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-2n+3}}{2n-3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}{2-\frac{3}{n}}=1$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}-\sqrt{1-\frac{5}{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}n\times\frac{\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}-\sqrt{1-\frac{5}{n}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}\right)}{\sqrt{1+\frac{7}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}n\times\frac{1+\frac{7}{n}-\left(1-\frac{5}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{7}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{\sqrt{1+\frac{7}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=6$$

▶ A_05 정답 : $\frac{1}{2}$

$n^2<n^2+n+1<n^2+2n+1$ 이므로

$n^2<n^2+n+1<(n+1)^2$

즉, $n<\sqrt{n^2+n+1}<n+1$

$\sqrt{n^2+n+1}$ 의 정수 부분이 n이므로

소수 부분 a_n 은 $a_n=\sqrt{n^2+n+1}-n$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}$$
$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

▶ *A_06* 정답 : $\frac{9}{2}$

$b_n = (2n+1)^2 a_n = (4n^2+4n+1)a_n$ 이라 하면

$\lim_{n\to\infty} b_n = 6$ 이고, $a_n = \frac{b_n}{4n^2+4n+1}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}(3n^2-4n)a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{(3n^2-4n)\times\frac{b_n}{4n^2+4n+1}\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n}{4n^2+4n+1}\times\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{4}\times 6 = \frac{9}{2}$

▶ *A_07* 정답 : $\frac{1}{2}$

원점을 지나고 기울기가 a_n 인 직선의 방정식은 $y = a_n x$, 즉 $a_n x - y = 0$ 이다.

또, 중심이 $\mathrm{P}_n(n, n^2)$ 이고 y축에 접하는 원 C_n 의 반지름의 길이는 n 이다.

이때, 원 C_n 과 직선 $a_n x - y = 0$ 이 접하므로 원 C_n 의 중심 $\mathrm{P}_n(n, n^2)$ 과 직선 $a_n x - y = 0$ 사이의 거리는 원 C_n 의 반지름의 길이 n 과 같다.

따라서 $\frac{|na_n - n^2|}{\sqrt{a_n^2+1}} = n$, $|a_n - n| = \sqrt{a_n^2+1}$ 이고

$a_n^2 - 2na_n + n^2 = a_n^2 + 1$, $a_n = \frac{n^2-1}{2n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2} = \frac{1}{2}$

▶ *A_08* 정답 : 6

부등식 $2n < (n+1)^2 a_n < 2n+1$ 의 각 변을 $(n+1)^2$ 으로 나누면 $\frac{2n}{(n+1)^2} < a_n < \frac{2n+1}{(n+1)^2}$

$\therefore \frac{2n(3n+4)}{(n+1)^2} < (3n+4)a_n < \frac{(2n+1)(3n+4)}{(n+1)^2}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n(3n+4)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(3+\frac{4}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 6$

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n+4)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{4}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 6$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}(3n+4)a_n = 6$

▶ *A_09* 정답 : ②

ㄱ. (반례) $a_n = \begin{cases} -1 & (n\text{이 홀수}) \\ 1 & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$ 이면 $a_n{}^2 = 1$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n{}^2 = 1$ 이지만 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $a_n - b_n = c_n$ 이라고 하면 $b_n = a_n - c_n$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n - c_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{c_n}{a_n}\right) = 1$ (참)

ㄷ. (반례) $a_n = n - \frac{1}{n}$, $b_n = n + \frac{1}{n}$, $c_n = n$ 에서

$a_n < c_n < b_n$, $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0$ 이지만

$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

▶ *A_10* 정답 : (1) 3 (2) -2 (3) $\frac{3}{4}$

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+2}-3^{2n}}{4^n - 3^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\times 4^n - 9^n}{4^n - \frac{1}{3}\times 9^n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{4\times\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1}{\left(\frac{4}{9}\right)^n - \frac{1}{3}} = \frac{0-1}{0-\frac{1}{3}} = 3$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 4^n - b\times 3^{n+1}}{3^n + 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a\times\left(\frac{4}{3}\right)^n - 3b}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

$n\to\infty$ 일 때, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ 이고 $\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$ 이므로 $a \neq 0$ 이면 이 극한은 ∞ 또는 $-\infty$ 로 발산한다.

따라서 $a = 0$ 이다. 이때

$\lim_{n\to\infty}\frac{-b\times 3^{n+1}}{3^n+2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-3b}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = -3b = 6$

에서 $b = -2$ $\therefore a + b = 0 + (-2) = -2$

(3) $S_n = 3^n + 4^n$ 이므로 $n \geq 2$ 일 때

$a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n + 4^n) - (3^{n-1} + 4^{n-1})$

$= (3-1)\cdot 3^{n-1} + (4-1)\cdot 4^{n-1} = 2\cdot 3^{n-1} + 3\cdot 4^{n-1}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^{n-1} + 3\cdot 4^{n-1}}{3^n + 4^n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} = \frac{3}{4}$

▶ *A_11* 정답 : 1

i) $x = -2$ 일 때, 주어진 수열은 수렴한다.

ii) $x \neq -2$ 일 때

$\frac{(x+2)(2x-1)^n}{3^n} = (x+2)\left(\frac{2x-1}{3}\right)^n$ 이므로

등비수열 $\left\{(x+2)\left(\frac{2x-1}{3}\right)^n\right\}$ 이 수렴하려면

$-1 < \frac{2x-1}{3} \leq 1$, $-3 < 2x-1 \leq 3$, $-1 < x \leq 2$

ⅰ), ⅱ)에서 구하는 정수 x는 -2, 0, 1, 2이므로 이들의 합은 1이다.

▶ *A_12* **정답 :** (1) $\frac{23}{2}$ (2) 33

(1) ⅰ) $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+2x}{x^{n-1}+1}=\frac{0+2x}{0+1}=2x$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}=1$

ⅱ) $x=1$일 때, $f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}+2\cdot1}{1^{n-1}+1}=\frac{3}{2}$

ⅲ) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+2x}{x^{n-1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\frac{2}{x^{n-2}}}{1+\frac{1}{x^{n-1}}}$

$=\frac{x^2+0}{1+0}=x^2 \quad \therefore f(3)=3^2=9$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서

$f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f(3)=1+\frac{3}{2}+9=\frac{23}{2}$

(2) $a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}$ 에서

ⅰ) $0<k<6$일 때

$\frac{6}{k}>1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^n=\infty$

$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)}{1+\frac{1}{\left(\frac{6}{k}\right)^n}}=\frac{\frac{6}{k}}{1+0}=\frac{6}{k}$

$\therefore ka_k=6$

ⅱ) $k=6$일 때 $\frac{6}{k}=1$이므로

$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}}{1^n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2} \quad \therefore ka_k=6\times\frac{1}{2}=3$

ⅲ) $k>6$일 때

$0<\frac{6}{k}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^n=0$

$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}=\frac{0}{0+1}=0 \quad \therefore ka_k=k\times0=0$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)으로부터

$\sum_{k=1}^{10}ka_k=\sum_{k=1}^{5}ka_k+6a_6+\sum_{k=7}^{10}ka_k$

$=5\times6+3+4\times0=33$

B. 급수

▶ *B_01* **정답 :** (1) 1 (2) $\frac{3}{4}$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\right.$

$\left.\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$

(2) 네 점 A_n, B_n, B_{n+1}, A_{n+1}의 좌표는

$\mathrm{A}_n\left(n,\ \frac{1}{n}\right)$, $\mathrm{B}_n\left(n,\ \frac{1}{n+1}\right)$, $\mathrm{B}_{n+1}\left(n+1,\ \frac{1}{n+2}\right)$,

$\mathrm{A}_{n+1}\left(n+1,\ \frac{1}{n+1}\right)$ 이고, 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$은 사다리꼴이므로 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이 a_n은

$a_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\times1$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-0-0\right)=\frac{3}{4}$

▶ *B_02* **정답 :** (1) 4 (2) 2 (3) -7

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n+1}{n}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n+1}{n}\right)=0$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(a_n-\frac{2n+1}{n}\right)+\frac{2n+1}{n}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n+1}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}$

$=0+\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(3a_n-2)=3\times2-2=4$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=0$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{a_n}{n}-3\right)+3\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)+3$
$=0+3=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-5}{3n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{a_n}{n}-\frac{5}{n}}{3+\frac{4}{n}}=\frac{2\times3+0}{3+0}=2$

(3) 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+3)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-2)$ 가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+3)=0$, $\lim_{n\to\infty}(b_n-2)=0$ 에서

$\lim_{n\to\infty}a_n=-3$, $\lim_{n\to\infty}b_n=2$

또한, $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\{2(a_n+3)+3(b_n-2)\}$
$=2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+3)+3\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-2)$
$=2\times4+3\times5=23$

이므로 $\lim_{n\to\infty}5a_nb_n+\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)$
$=5\times(-3)\times2+23=-7$

▶ *B_03* 정답 : ②

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=1\neq0$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}$ 은 발산한다.(발산)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+3}\right)$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)\right.$
$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$
$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{3}$ (수렴)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$
$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$
$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$
(발산)

따라서 수렴하는 것은 ㄴ이다.

▶ *B_04* 정답 : ①

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$

$\lim_{n\to\infty}a_n=1\neq0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 은 발산한다.(참)

ㄴ. (반례) 수열 $\{a_n\}$ 을

$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ \frac{1+(-1)^{n+1}}{2},\ \cdots$

이라고 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=0$ 으로 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 은 발산한다. (거짓)

ㄷ. 반례) $a_n=0,\ b_n=1$ 이면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$ 으로 수렴하지만

$\lim_{n\to\infty}b_n=1\neq0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 은 발산한다.(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

▶ *B_05* 정답 : (1) 48 (2) $\frac{7}{8}$

(1) 등비수열$\{a_n\}$의 첫째항을 $a(a>0)$, 공비를 $r(r>0)$ 라 하면 $a_2=ar=6, a_5=ar^4=\frac{3}{4}$ 두 식을 연립하면

$a=12, r=\frac{1}{2}$ 이므로 $a_n=12\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_na_{n+2}=\left\{12\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\times\left\{12\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}=36\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{36\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}=\frac{36}{1-\frac{1}{4}}=48$

(2) $a_1=2,\ a_2=1,\ a_3=2,\ a_4=1,\ \cdots$ 이므로
$a_{2n-1}=2,\ a_{2n}=1\ (n\geq1)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{2n-1}}{3^{2n-1}}+\frac{a_{2n}}{3^{2n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n-1}}{3^{2n-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n}}{3^{2n}}$
$=\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right)$
$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}+\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

▶ *B_06* 정답 : $\frac{3}{16}$

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 $a_n=ar^{n-1}(n=1,2,\cdots)$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}=4$

$\sum_{n=1}^{\infty}2^na_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2a)\times(2r)^{n-1}=\frac{2a}{1-2r}=12$

이므로 $a=4(1-r)$, $a=6(1-2r)$

두 식을 연립하면 $a=3$, $r=\frac{1}{4}$

따라서 $a_3=3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{16}$

▶ *B_07* **정답 :** $-1<x<2$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+1}{3}\right)^n$ 이 수렴하려면

$-1<\frac{x+1}{3}<1$에서 $-4<x<2$ …… ㉠

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}$ 이 수렴하려면

$-1<\left(\frac{x-1}{2}\right)^2<1$에서 $0\le\left(\frac{x-1}{2}\right)^2<1$

$0\le(x-1)^2<4$, 즉, $(x-1)^2<4$

$(x-3)(x+1)<0$, $-1<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 두 급수가 모두 수렴하기 위한 x 의 값의 범위는 $-1<x<2$ 이다.

▶ *B_08* **정답 :** ④

ㄱ. 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 이 수렴하므로 급수의 성질에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ 도 수렴한다. (참)

ㄴ. [반례] $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$, $b_n=2^n$ 일 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 이 수렴하고, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 이 발산하지만

$a_nb_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

즉, 수렴한다. (거짓)

ㄷ. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 이 수렴하므로

$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1\times r^{n-1}}{b_1\times s^{n-1}}=\frac{a_1}{b_1}\times\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1}$ 에서 $\left|\frac{r}{s}\right|<1$

$\therefore |r|<|s|$

또 수열 $\{b_n\}$이 수렴하므로 $-1<s\le1$

$|r|<|s|\le1$에서 $|r|<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴 (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

▶ *B_09* **정답 :** (1) 8π (2) $\frac{5}{16}\pi$ (3) $8-2\pi$

(1) $\overline{AB_{n+1}}:\overline{B_{n+1}B_n}=3:1$이므로

$\overline{AB_{n+1}}=\frac{3}{4}\overline{AB_n}$, $\overline{B_{n+1}B_n}=\frac{1}{4}\overline{AB_n}$

$\overline{AB_1}=4$이므로 $\overline{AB_n}=4\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 이다.

따라서 $l_n=\frac{1}{2}\times\left(2\pi\times\frac{3}{8}\overline{AB_n}\right)+\frac{1}{2}\times\left(2\pi\times\frac{1}{8}\overline{AB_n}\right)$

$=\pi\times\frac{1}{2}\overline{AB_n}=2\pi\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}l_n=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=2\pi\times\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=8\pi$

(2) 그림 R_n에서 새로 색칠한 부채꼴의 반지름의 길이를 r_n, 넓이를 T_n이라 하자.

T_1은 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴의 넓이이므로 $T_1=\frac{\pi}{4}$이다.

사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 $\overline{A_2B_2}=r_2$, $\overline{A_2D_2}=2r_2$이고,

$\overline{A_2C_2}=\overline{A_1D_1}-\overline{A_1M_1}=2-1=1$

삼각형 $A_2B_2C_2$는 직각삼각형이므로

$(r_2)^2+(2r_2)^2=1^2$ $\therefore r_2=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore T_2=\frac{1}{4}\times\left\{\pi\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2\right\}=\frac{\pi}{20}=\frac{1}{5}T_1$

같은 방법으로 $T_{n+1}=\frac{1}{5}T_n\ (n\ge1)$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{16}\pi$

(3) 그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 정사각형의 넓이에서 사분원 4개의 넓이를 빼면 되므로

$S_1=2^2-4\times\frac{\pi}{4}=4-\pi$

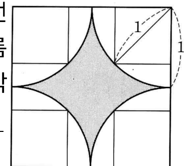


그림 R_2에서 작은 정사각형의 대각선의 길이가 그림 R_1의 사분원의 반지름의 길이와 같으므로 1이다. 따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

그림 R_2의 바깥쪽 큰 정사각형과 안쪽의 작은 정사각형 한 개의 닮음비가 $2:\frac{\sqrt{2}}{2}$, 즉 $1:\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{8}$이다.

그림 R_n에서 새로 그려지는 ✧ 모양 전체의 넓이의 합을 T_n이라 하면 $T_1=S_1=4-\pi$이고

$T_{n+1}=4\times\frac{1}{8}T_n=\frac{1}{2}T_n\ (n\ge1)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\sum_{n=1}^{\infty}(4-\pi)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\frac{4-\pi}{1-\frac{1}{2}}=8-2\pi$

C. 함수의 극한

▶ *C_01* 정답 : 5

$\lim_{x\to -1-} f(x)=1,\ \lim_{x\to -1+} f(x)=1$ 이므로 $\lim_{x\to -1} f(x)=1$ 이다. 또 $\lim_{x\to 0-} f(x)=2,\ \lim_{x\to 1+} f(x)=2$ 이다.

$\therefore\ \lim_{x\to -1} f(x)+\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=1+2+2=5$

▶ *C_02* 정답 : (1) 0 (2) 8

(1) $x>3$일 때, $x^2-9>0$이므로

$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$
$=\lim_{x\to 3+}(x+3)=6$

$-3<x<3$일 때, $x^2-9<0$이므로

$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3-}\frac{-(x^2-9)}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{-(x+3)(x-3)}{x-3}$
$=\lim_{x\to 3-}(-x-3)=-6$

$\lim_{x\to 3+} f(x)+\lim_{x\to 3-} f(x)=6+(-6)=0$

(2) $\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(x-3)=-2$

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(2x^2-ax+1)=3-a$

$\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)$에서 $-2=3-a,\ a=5$

따라서

$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(2x^2-5x+1)=2+5+1=8$

▶ *C_03* 정답 : (1) 4 (2) 9

(1) $\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)}{x}-2\right\}=0$에서

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\left\{\frac{f(x)}{x}-2\right\}+2\right]$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)}{x}-2\right\}+\lim_{x\to 0}2=0+2=2$

$\lim_{x\to 0}\frac{5f(x)+ax}{3f(x)-4x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\times\frac{f(x)}{x}+a}{3\times\frac{f(x)}{x}-4}=\frac{5\times 2+a}{3\times 2-4}=\frac{10+a}{2}$

따라서 $\frac{10+a}{2}=7$에서 $a=4$

(2) $\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)\times\lim_{x\to 1+} g(x)$

$=\lim_{x\to 1+}(x+2)\times\lim_{x\to 1+}(3x+a)=3\times(3+a)=9+3a$

$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)\times\lim_{x\to 1-} g(x)$

$=\lim_{x\to 1-}(-x+2)\times\lim_{x\to 1-}(3x+a)=(3+a)=3+a$

$\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=b$ 이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=b$

에서 $9+3a=3+a=b$ 이므로 $a=-3,\ b=0$

$\therefore\ a^2+b^2=(-3)^2+0^2=9$

▶ *C_04* 정답 : ③

ㄱ. $x+a=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to a$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x+a)=\lim_{t\to a} f(t)=k$(참)

ㄴ. $\lim_{x\to a}(x-a)f(x),\ \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}$의 값이 모두 존재하면 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a}(x-a)f(x)\times\frac{g(x)}{x-a}$

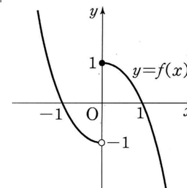
$=\lim_{x\to a}(x-a)f(x)\times\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}$ 이므로 $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$의 값도 존재한다. (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=x-a,\ g(x)=(x-a)^2$으로 놓으면 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=1,\ \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=0$으로 그 값이 모두 존재하지만 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

▶ *C_05* 정답 : ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to 0+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to 0+} f(x)\times\lim_{x\to 0+} f(x)=1$



$\lim_{x\to 0-}\{f(x)\}^2$
$=\lim_{x\to 0-} f(x)\times\lim_{x\to 0-} f(x)$
$=(-1)\times(-1)=1$
$\therefore\ \lim_{x\to 0}\{f(x)\}^2=1$ (참)

ㄴ. $x^2=t$라 두면 $x\to 0$일 때 $t\to 0+$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x^2)=\lim_{t\to 0+} f(t)=1$ (참)

ㄷ. $-x=t$라 놓으면 $\lim_{x\to 0+} f(-x)=\lim_{t\to 0-} f(t)=-1$, $\lim_{x\to 0-} f(-x)=\lim_{t\to 0+} f(t)=1$ 이므로

$\lim_{x\to 0+} f(x)f(-x)=\lim_{x\to 0+} f(x)\times\lim_{x\to 0+} f(-x)$
$=1\times(-1)=-1$

$\lim_{x\to 0-} f(x)f(-x)=\lim_{x\to 0-} f(x)\times\lim_{x\to 0-} f(-x)$
$=(-1)\times 1=-1$

$\therefore\ \lim_{x\to 0} f(x)f(-x)=-1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ 이다.

▶ *C_06* **정답 : ③**

ㄱ. $\lim_{x\to1+} f(x)=-1$, $\lim_{x\to1+} g(x)=1$ 이므로

$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=(-1)\times1=-1$

$\lim_{x\to1-} f(x)=1$, $\lim_{x\to1-} g(x)=-1$ 이므로

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=1\times(-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)g(x)=-1$ (참)

ㄴ. $x-2=t$로 놓으면

$x\to1+$일 때 $t\to-1+0$이므로

$\lim_{x\to1+} f(x-2)=\lim_{t\to-1+} f(t)=-1$

$x\to1-$일 때 $t\to-1-0$이므로

$\lim_{x\to1-} f(x-2)=\lim_{t\to-1-} f(t)=1$

한편, $\lim_{x\to1+} g(x)=1$, $\lim_{x\to1-} g(x)=-1$ 이므로

$\lim_{x\to1+}\{f(x-2)+g(x)\}=(-1)+1=0$,

$\lim_{x\to1-}\{f(x-2)+g(x)\}=1+(-1)=0$

따라서 $\lim_{x\to1}\{f(x-2)+g(x)\}=0$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to-1+} f(x)=-1$, $\lim_{x\to-1-} f(x)=1$ 이고

$-x=t$ 로 놓으면

$\lim_{x\to-1+} g(-x)=\lim_{t\to1-} g(t)=-1$

$\lim_{x\to-1-} g(-x)=\lim_{t\to1+} g(t)=1$ 이므로

$\lim_{x\to-1+}\{f(x)+g(-x)\}=(-1)+(-1)=-2$

$\lim_{x\to-1-}\{f(x)+g(-x)\}=1+1=2$

그러므로 극한값 $\lim_{x\to-1}\{f(x)+g(-x)\}$는 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

▶ *C_07* **정답 : ⑴ -3 ⑵ 14**

⑴ $\lim_{x\to-1}\dfrac{x^3-4x^2-5x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\dfrac{x(x-5)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim_{x\to-1}\dfrac{x(x-5)}{x-1}=\dfrac{(-1)\times(-1-5)}{-1-1}=-3$

⑵ $\lim_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-10}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{(x+5)(x-2)(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2})(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2})}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{(x+5)(x-2)(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2})}{2(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{(x+5)(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2})}{2}=\dfrac{7(2+2)}{2}=14$

▶ *C_08* **정답 : ⑴ -3 ⑵ 4**

⑴ $-x=t$ 라 하면 $x\to-\infty$ 일 때 $t\to\infty$ 이므로

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{6x+7}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{-6t+7}{\sqrt{t^2-2t}+t}$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{-6+\frac{7}{t}}{\sqrt{1-\frac{2}{t}}+1}=\dfrac{-6+0}{\sqrt{1-0}+1}=-3$

⑵ $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+x}-2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x}+2x}{(\sqrt{4x^2+x}-2x)(\sqrt{4x^2+x}+2x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x}+2x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2\right)$

$=\sqrt{4}+2=4$

▶ *C_09* **정답 : ⑴ $\frac{7}{5}$ ⑵ $\frac{3}{2}$**

⑴ $\lim_{x\to3}\dfrac{7}{x-3}\left(1-\dfrac{5}{x+2}\right)=\lim_{x\to3}\dfrac{7}{x-3}\times\dfrac{(x+2)-5}{x+2}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{7}{x+2}=\dfrac{7}{5}$

⑵ $\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+3}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)}{\sqrt{x^2+3}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}=\dfrac{3}{1+1}=\dfrac{3}{2}$

▶ *C_10* **정답 : ⑴ -1 ⑵ 6 ⑶ 16**

⑴ $\lim_{x\to3}\dfrac{1}{x-3}\left(\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{b}\right)=\lim_{x\to3}\left\{\dfrac{1}{x-3}\times\dfrac{-x-a+b}{b(x+a)}\right\}$

$x\to3$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$ 이므로

(분자)$\to0$ 이다. $\therefore -3-a+b=0$ ⋯ ㉠

(주어진 식)$=\lim_{x\to3}\left\{\dfrac{1}{x-3}\times\dfrac{-(x-3)}{b(x+a)}\right\}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{-1}{b(x+a)}=\dfrac{-1}{b(3+a)}=-1$

이므로 $a\neq-3$ 이고, $b(3+a)=1$이다

㉠에서 $3+a=b$ 이므로 $b^2=1$, $b>0$ 이므로 $b=1$

따라서 $a=-2$, $b=1$ 이므로 $a+b=-2+1=-1$

⑵ $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$에서 $x\to1$ 일 때, (분모) $\to0$

이므로 (분자) $\to0$ 이어야 한다. $\therefore \lim_{x\to1} f(x)=0$

$\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=1$ 에서 $x\to2$ 일 때 (분모) $\to0$ 이므로

(분자) $\to0$ 이어야 한다. $\therefore \lim_{x\to2} f(x)=0$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$ ($a\neq0$ 이고, a, b 는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x-2)(ax+b)$$
$$=-(a+b)=1 \quad \therefore\ a+b=-1 \cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x-1)(ax+b)$$
$$=2a+b=1 \quad \therefore\ 2a+b=1 \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-3$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(2x-3)$ 이므로 $f(3)=6$

(3) 조건 (가)에 의하여 $f(x)-x^3=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면 $f(x)=x^3+ax+b$

조건 (나)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+ax+b}{x}=4$

$x\to0$ 일 때 (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(x^3+ax+b)=b=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+ax+b}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+a)}{x}=\lim_{x\to0}(x^2+a)=a$$
$$=4$$

따라서 $f(x)=x^3+4x$ 이므로 $f(2)=8+8=16$

▶ *C_11* 정답 : $\frac{2}{3}$

$x\neq0$일 때, $x^2>0$이고, $2x^2-1<f(x^2)<2x^2+5$이므로

$$\frac{2x^2-1}{3x^2+1}<\frac{f(x^2)}{3x^2+1}<\frac{2x^2+5}{3x^2+1}$$

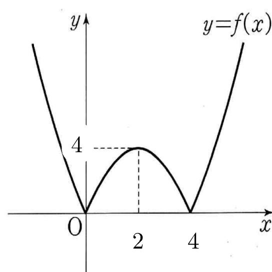
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$$

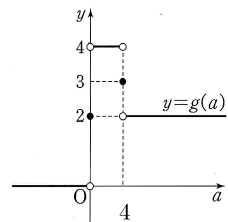
$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x^2)}{3x^2+1}=\frac{2}{3}$$

▶ *C_12* 정답 : (1) 6 (2) π (3) 1

(1) 함수 $f(x)=|x^2-4x|$의 그래프는 그림과 같다.



$$\therefore\ g(a)=\begin{cases}2 & (a>4)\\ 3 & (a=4)\\ 4 & (0<a<4)\\ 2 & (a=0)\\ 0 & (a<0)\end{cases}$$



이때 $\lim_{a\to1}g(a)=4,\ \lim_{a\to4+}g(a)=2$ 이므로

$\lim_{a\to1}g(a)\lim_{a\to4+}g(a)=4+2=6$

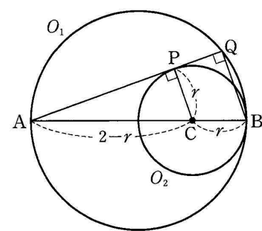
(2) 삼각형 OPH에서 $\angle OHP=90°$이므로 변 OP는 삼각형 OPH의 외접원의 지름이다.

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+(\sqrt{2t})^2}=\sqrt{t^2+2t}$ 이므로

$f(t)=2\pi\times\frac{\overline{OP}}{2}=\pi\sqrt{t^2+2t}$

$$\lim_{t\to\infty}\{f(t)-\pi t\}=\lim_{t\to\infty}(\pi\sqrt{t^2+2t}-\pi t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\pi(\sqrt{t^2+2t}-t)(\sqrt{t^2+2t}+t)}{\sqrt{t^2+2t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\pi\{(t^2+2t)-t^2\}}{\sqrt{t^2+2t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2\pi t}{\sqrt{t^2+2t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2\pi}{\sqrt{1+\frac{2}{t}}+1}=\frac{2\pi}{1+1}=\pi$$

(3) 그림과 같이 원 O_2의 중심을 C라 할 때,



$\overline{AP}=\sqrt{(2-r)^2-r^2}$

$=\sqrt{4-4r}$

두 삼각형 ACP, ABQ는 닮은 삼각형이므로

$\overline{AC}:\overline{CB}=\overline{AP}:\overline{PQ}$

$(2-r):r=\sqrt{4-4r}:\overline{PQ}$

$\therefore\ \overline{PQ}=\frac{r\sqrt{4-4r}}{2-r}$

$$\therefore\ \lim_{r\to0+}\frac{\overline{PQ}}{r}=\lim_{r\to0+}\frac{\sqrt{4-4r}}{2-r}=1$$

$\mathcal{D}$. 함수의 연속

▶ $\mathcal{D}$_01 정답 : (1) 12 (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(1)함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$ 이어야 한다.

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-6}{x-1} = b$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to1}(x^2+ax-6) = a-5=0 \quad \therefore\ a=5$

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-6}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{x^2+5x-6}{x-1}$

$= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+6)}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+6) = 7 = b$

$\therefore\ a+b=5+7=12$

(2) $x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-1}$

함수 $f(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$, $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-1}=f(1)$

$x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

$\lim_{x\to1}(\sqrt{x+a}-\sqrt{3})=\sqrt{1+a}-\sqrt{3}=0$, $a=2$

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2-3)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

▶ $\mathcal{D}$_02 정답 : -1

$y=x+k$, $y=x^2-x$에서 $x^2-x=x+k$,

$x^2-2x-k=0$ …… ㉠

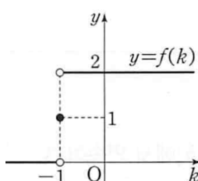
x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2+k=k+1$$

ⅰ) $k<-1$일 때, ㉠은 두 허근을 가지므로 $f(k)=0$

ⅱ) $k=-1$일 때, ㉠은 중근을 가지므로 $f(-1)=1$

ⅲ) $k>-1$일 때, ㉠은 서로 다른 두 실근을 가지므로 $f(k)=2$



위의 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 함수 $f(k)$는 $k=-1$에서 불연속임을 알 수 있다. $\therefore a=-1$

▶ $\mathcal{D}$_03 정답 : (1) -2 (2) 1

(1) $g(x)=f(1+x)-f(1-x)$로 놓으면

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0-}g(x)=g(0)$

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\{f(1+x)-f(1-x)\}$

$=\lim_{x\to0+}f(1+x)-\lim_{x\to0+}f(1-x)$

$=\lim_{t\to1+}f(t)-\lim_{t\to1-}f(t)=(3+a)-1=a+2$

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}\{f(1+x)-f(1-x)\}$

$=\lim_{x\to0-}f(1+x)-\lim_{x\to0-}f(1-x)$

$=\lim_{t\to1-}f(t)-\lim_{t\to1+}f(t)$

$=1-(3+a)=-(a+2)$

$g(0)=f(1)-f(1)=0$

따라서 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$a+2=-(a+2)=0$이므로 $a=-2$

(2) 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

$\lim_{x\to1+}(ax^2-3x)(a+4)=\lim_{x\to1-}(ax^2-3x)(-a)$

$=(a-3)(-a)$

$(a-3)(a+4)=-a(a-3)$, $(a-3)(2a+4)=0$

$a=3$ 또는 $a=-2$

따라서 구하는 a 의 값의 합은 $3+(-2)=1$

▶ $\mathcal{D}$_04 정답 : ③

ㄱ. 0이 아닌 모든 실수에서 함수 $f(x)$는 연속이므로

$\lim_{x\to c}f(x)=f(c)\ (c\neq0)$이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to0+}f(x)f(-x)$

$=\lim_{x\to0+}f(x)\times\lim_{x\to0+}f(-x)$

$=\lim_{x\to0+}f(x)\times\lim_{t\to0-}f(t)$

$=\lim_{x\to0+}(x-1)\times\lim_{t\to0-}(-t^2+2)$

$=(-1)\times2=-2$

$\lim_{x\to0-}f(x)f(-x)$

$=\lim_{x\to0-}f(x)\times\lim_{x\to0-}f(-x)$

$=\lim_{x\to0-}f(x)\times\lim_{t\to0+}f(t)$

$=\lim_{x\to0-}(-x^2+2)\times\lim_{t\to0+}(t-1)=2\times(-1)$

$=-2$

$\therefore\ \lim_{x\to0}f(x)f(-x)=-2$ (참)

ㄷ. $f(0)f(-0)=2\times2=4$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)f(-x)\neq f(0)f(-0)$이다. ($\because$ ㄴ)

즉, 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=0$에서 불연속(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

▶ *D_05* 정답 : ③

ㄱ. $\lim_{x\to1-} f(x)g(x) = \lim_{x\to1-} f(x) \times \lim_{x\to1-} g(x)$

$= \lim_{x\to1-} (2x-1) \times \lim_{x\to1-} (x^2+x-2) = 1\times0=0$

$\lim_{x\to1+} f(x)g(x) = \lim_{x\to1+} f(x) \times \lim_{x\to1+} g(x)$

$= \lim_{x\to1+} (-x) \times \lim_{x\to1+} (x^2+x-2)$

$= (-1)\times0=0$

$f(1)g(1)=1\times0=0$이므로

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x) = \lim_{x\to1+} f(x)g(x)=f(1)g(1)$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to1-} f(x)g(x) = \lim_{x\to1-} f(x) \times \lim_{x\to1-} g(x)$

$= \lim_{x\to1-} (2x-1) \times \lim_{x\to1-} (x+1) = 1\times2=2$

$\lim_{x\to1+} f(x)g(x) = \lim_{x\to1+} f(x) \times \lim_{x\to1+} g(x)$

$= \lim_{x\to1+} (-x) \times \lim_{x\to1+} (x+1) = (-1)\times2=-2$

이므로 $\lim_{x\to1} f(x)g(x)$ 이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to1-} f(x)g(x) = \lim_{x\to1-} f(x) \times \lim_{x\to1-} g(x)$

$= \lim_{x\to1-} (2x-1) \times \lim_{x\to1-} x = 1\times1=1$

$\lim_{x\to1+} f(x)g(x) = \lim_{x\to1+} f(x) \times \lim_{x\to1+} g(x)$

$= \lim_{x\to1+} (-x) \times \lim_{x\to1+} (-x) = (-1)\times(-1)$

$=1$

$f(1)g(1)=1\times1=1$ 이므로

$\lim_{x\to1} f(x)g(x) = f(1)g(1)$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$는 ㄱ, ㄷ이다.

▶ *D_06* 정답 : ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to1-} \{f(x)+g(x)\}=1+0=1$

$\lim_{x\to1+} \{f(x)+g(x)\}=0+1=1$

이므로 $\lim_{x\to1} \{f(x)+g(x)\}=1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to-1-} f(x)g(x)=0\times1=0$

$\lim_{x\to-1+} f(x)g(x)=1\times0=0$

이므로 $\lim_{x\to-1} f(x)g(x)=0$

또한 $f(-1)g(-1)=1\times0=0$ 이므로

$\lim_{x\to-1} f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$

즉 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $\lim_{x\to-1-} \left(1+\frac{1}{x}\right)g(x)=0\times1=0$,

$\lim_{x\to-1+} \left(1+\frac{1}{x}\right)g(x)=0\times0=0$

이므로 $\lim_{x\to-1} \left(1+\frac{1}{x}\right)g(x)=0$

또한 $(1-1)g(-1)=0$ 이므로

$\lim_{x\to-1} \left(1+\frac{1}{x}\right)g(x)=(1-1)g(-1)$

즉, 함수 $\left(1+\frac{1}{x}\right)g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

▶ *D_07* 정답 : (1) 3 (2) 20

(1) 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty} \frac{ax^{2n}+3x}{x^{2n}+1}$ 에서

(ⅰ) $|x|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty} \frac{ax^{2n}+3x}{x^{2n}+1} = \frac{3x}{1} = 3x$

(ⅱ) $x=1$일 때 $f(1)=\frac{a+3}{1+1}=\frac{a+3}{2}$

(ⅲ) $|x|>1$일 때 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

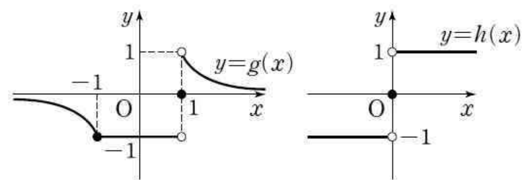
$f(x)=\lim_{n\to\infty} \frac{ax^{2n}+3x}{x^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a+\frac{3}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}} = a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1+} f(x) = f(1)$이므로

$3=a=\frac{a+3}{2}$ $\quad\therefore a=3$

(2) $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & (|x|>1) \\ 0 & (x=1) \\ -1 & (|x|<1) \\ -1 & (x=-1) \end{cases}$, $h(x)=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$



함수 $f(x)g(x)$가 연속함수이므로 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$f(1)g(1) = \lim_{x\to1+} f(x)g(x) = \lim_{x\to1-} f(x)g(x)$에서

$0=f(1)=-f(1)$ 즉, $f(1)=0$

함수 $f(x)h(x)$가 연속함수이므로 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$f(0)h(0) = \lim_{x\to0+} f(x)h(x) = \lim_{x\to0-} f(x)h(x)$에서

$0=f(0)=-f(0)$ 즉, $f(0)=0$

$\therefore f(x)=x(x-1)$ $\;\therefore f(5)=20$

▶ *D_08* **정답 :** ⑴ 20 ⑵ 2

⑴ 연속함수 $f(x)$가 모든 정수 n에 대하여 $f(2n)=1$이고 $f(2n-1)=-1$이므로

$$f(0)=f(2)=\cdots=f(20)=1>0$$
$$f(1)=f(3)=\cdots=f(19)=-1<0$$

따라서 사이값 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간

$(m,\ m+1)$ (단, $m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 19$)

에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

그러므로 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(0,\ 20)$에서 적어도 20개의 실근을 갖는다.

따라서 $k=20$

⑵ 일차함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=1$과 만나는 점의 x좌표는 방정식 $f(x)=1$의 실근이다.

방정식 $f(x)=1$, 즉 $f(x)-1=0$이 열린 구간 $(-1,\ 1)$에서 실근을 가지려면 사이값 정리에 의해 다음 부등식이 성립해야 한다.

$$\{f(-1)-1\}\{f(1)-1\}<0$$
$$(2k+2)(k-2)<0$$
$$-1<k<2$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k의 값은 $0,\ 1$의 2개다.

E. 미분계수와 도함수

▶ *E_01* **정답 :** ⑴ 2 ⑵ 3

⑴ $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\times2\right\}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\times\lim_{h\to0}2=f'(3)\times2=2$

⑵ $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-4h)}{3h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-4h)}{3h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times\frac{2}{3}$

$\displaystyle\quad-\lim_{h\to0}\frac{f(1-4h)-f(1)}{-4h}\times\left(-\frac{4}{3}\right)$

$\displaystyle=\frac{2}{3}f'(1)+\frac{4}{3}f'(1)=2f'(1)=6\quad\therefore f'(1)=3$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이다.

▶ *E_02* **정답 :** ⑴ 8 ⑵ 5

⑴ 다항함수 $f(x)$에 대하여 점 $(1,\ 3)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=3$이고, 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로 $f'(1)=-2$이다.

$\displaystyle\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(1)+f(1)-f(x)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)f(1)}{x-1}-f'(1)$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}(x+1)f(1)-f'(1)$

$=2f(1)-f'(1)=2\times3-(-2)=8$

⑵ $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)+3}{h}=-4$에서

$h\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{h\to0}\{f(2+h)+3\}=0$

또한, $f(x)$는 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.

$\displaystyle\therefore f(2)=\lim_{h\to0}f(2+h)=-3$

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)+3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

$=-4$

$\displaystyle\therefore\lim_{x\to1}\frac{xf(2)-f(2x)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{xf(2)-f(2)+f(2)-f(2x)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{xf(2)-f(2)}{x-1}-\frac{f(2x)-f(2)}{x-1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{(x-1)f(2)}{x-1}-\frac{f(2x)-f(2)}{2x-2}\times2\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}f(2)-\lim_{x\to1}\frac{f(2x)-f(2)}{2x-2}\times2$$
$$=f(2)-2f'(2)=-3-2\times(-4)=5$$

▶ $\mathcal{E}$_03 정답 : (1) 7 (2) 3

(1) 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$
즉, $b+2=1+a$ $\therefore a-b=1$ ……㉠
또, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분계수가 존재하므로
$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(bx^2+x+1)-(b+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(bx+b+1)}{x-1}=2b+1$$
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{x^3+ax-(b+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^3+ax-(1+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x^2+x+1+a)}{x-1}=a+3$$
따라서 $2b+1=a+3$ 에서 $a-2b=-2$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=3$ $\therefore a+b=7$

(2) $x>1$ 일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3x^2+\dfrac{a}{x^{n-2}}+\dfrac{b}{x^{n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^n}}$
$=3x^2$
$x=1$ 일 때, $f(1)=\dfrac{3+a+b}{2}$
$0<x<1$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$ 이므로 $f(x)=ax^2+bx$
(i) 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$
즉, $\lim_{x\to1+}3x^2=\lim_{x\to1-}(ax^2+bx)=\dfrac{3+a+b}{2}$ 에서
$3=a+b=\dfrac{3+a+b}{2}$ $\therefore a+b=3$ ……㉠
(ii) ㉠에서 $f(1)=\dfrac{3+a+b}{2}=3$이고
미분계수 $f'(1)$ 이 존재해야 하므로
$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{3x^2-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{3(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}3(x+1)=6$$
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{ax^2+bx-(a+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{a(x-1)(x+1)+b(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\{a(x+1)+b\}=2a+b=6 \ \cdots\cdots㉡$$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=0$ $\therefore a-b=3$

▶ $\mathcal{E}$_04 정답 : 2

$f(x+y)=f(x)+f(y)+5xy(x+y)$ 에 $x=0,\ y=0$ 을 대입하면 $f(0+0)=f(0)+f(0)+0$ $\therefore f(0)=0$
$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=-3$$
$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+5xh(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+5xh(x+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+\lim_{h\to0}5x(x+h)$$
$$=5x^2-3$$
$f'(n)=5n^2-3>12$ 에서 $n^2>3$
따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 2 이다.

▶ $\mathcal{E}$_05 정답 : (1) 2 (2) 11

(1) $\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=6$ 이므로
$f'(x)=4x+a$ 에서 $f'(1)=4+a=6$ $\therefore a=2$
(2) $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수이므로
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$ 는 상수)라 하자.
$f(-1)=f(1)$ 이므로 $-1+a-b+c=1+a+b+c$
에서 $b=-1$, 한편 $f'(x)=3x^2+2ax-1$ 에서
$f'(1)=3+2a-1=2$ 이므로 $a=0$
따라서 $f'(x)=3x^2-1$ 이므로 $f'(2)=3\times2^2-1=11$

▶ $\mathcal{E}$_06 정답 : (1) 16 (2) $\dfrac{1}{5}$

$\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=4$ 에서 $x\to2$ 일 때, (분모)$\to0$ 이므로
(분자)$\to0$ 이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to2}f(x)=0$
그런데 $f(x)$ 가 다항함수이므로 $f(2)=0$
$\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ 이므로
$f'(2)=4$
$y=(3x-2)f(x)$ 에서 $y'=3f(x)+(3x-2)f'(x)$ 이므로 함수 $y=(3x-2)f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수는 $3f(2)+(3\times2-2)f'(2)=3\times0+4\times4=16$
(2) $(x^2+1)f(x)=x^3+x+5$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $5f(2)=2^3+2+5=15$ $\therefore f(2)=3$ ……㉠
$(x^2+1)f(x)=x^3+x+5$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $2xf(x)+(x^2+1)f'(x)=3x^2+1$ ……㉡
㉡의 양변에 $x=2$ 를 대입하면
$4f(2)+5f'(2)=3\times2^2+1$
$4\times3+5f'(2)=13$ ($\because$ ㉠) $\therefore f'(2)=\dfrac{1}{5}$

▶ E_07 정답 : (1) 9 (2) 13

(1) 다항식 $x^{10}-x^2+1$ 을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라고 하면

$x^{10}-x^2+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $1=a+b$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9-2x=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$10-2=a$이므로 $a=8$

$a=8$을 ㉡에 대입하면 $1=8+b$이므로 $b=-7$

따라서 $R(x)=8x-7$이므로 $R(2)=8\times2-7=9$

(2) 다항식 x^6+ax^2+b를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라고 하면 $x^6+ax^2+b=(x+1)^2Q(x)$…㉠

㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$1+a+b=0$, 즉 $a+b=-1$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^5+2ax=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$

위 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-6-2a=0$, $a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면 $b=2$이므로

$a^2+b^2=9+4=13$

▶ *E_08* **정답 :** (1) 5 (2) -27

(1) $g(x)=(x+1)f(x)-3x-1$이라 하면

$g(1)=2f(1)-3\times1-1=2\times2-3-1=0$ 이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+1)f(x)-3x-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$$

그런데 $g'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)-3$ 이므로

$g'(1)=f(1)+2f'(1)-3=2+2\times3-3=5$

(2) $F(x)=f(x)g(x)$라 하면

$F(0)=f(0)g(0)=(-3)\times(-1)=3$ 이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3h)g(3h)-3}{h}=\lim_{h\to0}3\times\frac{F(3h)-F(0)}{3h}$$

$$=3\lim_{h\to0}\left\{\frac{F(h)-F(0)}{h}\right\}=3F'(0)$$

$F(x)=f(x)g(x)=(2x^3-3)(-x^2+3x-1)$ 에서

$F'(x)=6x^2(-x^2+3x-1)+(2x^3-3)(-2x+3)$

$F'(0)=-9$ $\therefore$ $3F'(0)=-27$

F. 도함수의 활용 (1)

▶ *F_01* **정답 :** (1) $y=5x-13$ (2) 4

점 $(3,\ 1)$이 곡선 $y=f(x)$위의 점이므로 $f(3)=1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(3)=2$

$g(x)=(x-1)f(x)$로 놓으면

$g'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$ 이므로

$g'(3)=f(3)+(3-1)f'(3)=1+2\times2=5$

$g(3)=(3-1)f(3)=2\times1=2$

따라서 곡선 $y=(x-1)f(x)$ 위의 x좌표가 3인 점에서의 접선의 방정식은 기울기가 5이고 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$y-2=5(x-3)$ $\therefore$ $y=5x-13$

(2) $f(x)=x^3-x^2+2$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x$이므로 $f'(1)=3-2=1$

점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 1이므로 직선 l의 방정식은 $y-2=(x-1)$, 즉 $y=x+1$

직선 l과 수직인 직선의 기울기는 -1이므로

직선 m의 방정식은 $y-2=-(x-1)$ 즉, $y=-x+3$

두 직선 l, m 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$S=\frac{1}{2}\times\{3-(-1)\}\times2=4$ 이다.

▶ *F_02* **정답 :** (1) 0 (2) 6

(1) $f(x)=x^3-9x+14$에서 $f'(x)=3x^2-9$

$f'(a)=3a^2-9$이고, $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$3a^2-9=3$, $3(a+2)(a-2)=0$ $\therefore$ $a=2$ ($\because$ $a>0$)

$f(2)=2^3-9\times2+14=4$이므로

곡선 $f(x)=x^3-9x+14$위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$y=3(x-2)+4$, $y=3x-2$ $\therefore$ $b=-2$

$\therefore$ $a+b=2+(-2)=0$

(2) $f(x)=x^3-3x^2+x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+1$

이때 점 A의 x좌표가 3이므로 점 B의 x좌표를 k $(k\neq3)$라 하면 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하므로 $f'(3)=f'(k)$이다. 따라서

$3\times3^2-6\times3+1=3k^2-6k+1$

$k^2-2k-3=0$, $(k+1)(k-3)=0$

$\therefore$ $k=-1$ ($\because$ $k\neq3$)

따라서 점 B의 좌표는 $(-1,\ -4)$이고 $f'(-1)=10$이므로 이 곡선 위의 점 B에서의 접선의 방정식은

$y+4=10(x+1)$ $\therefore$ $y=10x+6$

따라서 직선 $y=10x+6$의 y절편은 6이다.

▶ *F_03* **정답 :** (1) 36 (2) 7

(1) 곡선 위의 접점 A의 좌표를 $(t,\ (t-1)^2)$ $(t>0)$이라 하자. $x>0$에서 $f(x)=(x-1)^2$이고

$f'(x)=2(x-1)$이므로 $x=t$에서의 접선의 기울기는

$2(t-1)$ 이다.
따라서 접선의 방정식은 $y-(t-1)^2=2(t-1)(x-t)$
이 직선이 점 $(0,\ -8)$ 을 지나므로
$-8-(t-1)^2=2(t-1)(0-t)$,
$-t^2+2t-9=-2t^2+2t$
$t^2=9\ \therefore\ t=3\ (\because\ t>0)$
따라서 접점 A 의 좌표는 $(3,\ 4)$ 이다.
한편 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 접점 B 의 좌표는 $(-3,\ 4)$ 이다.
따라서 삼각형 PAB 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times 12=36$

(2) $f(x)=x^3-2x^2-x+2$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-4x-1$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t^2-t+2)$라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-4t-1$이므로 접선의 방정식은 $y-(t^3-2t^2-t+2)=(3t^2-4t-1)(x-t)$
$y=(3t^2-4t-1)x-2t^3+2t^2+2$
이 직선이 점 $(2,\ -2)$를 지나므로
$-2=-2t^3+8t^2-8t$
즉, $t^3-4t^2+4t-1=(t-1)(t^2-3t+1)=0$
$t^2-3t+1=0$에서 $t\neq 1$이고 판별식 $D=9-4>0$이므로 이 방정식의 서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta$라고 하면 $\alpha+\beta=3$ 이므로 접선의 개수는 3이고, 모든 접점의 x 좌표의 합은 $1+3=4$이다. 즉, $a=3,\ b=4$이므로
$a+b=3+4=7$

▶ *F_04* **정답 :** 2
$f(x)=x^2+ax+b$ ($a,\ b$는 상수)라 하면 두 곡선 $y=x^3-2x+1,\ y=f(x)$는 x 좌표가 1인 점 P에서 만나므로
$1^3-2+1=f(1),\ 0=1+a+b\ \therefore a+b=-1$ ……㉠
$y'=3x^2-2$이고 점 P에서의 접선이 서로 일치하므로
$3\times 1^2-2=f'(1)$
한편, $f'(x)=2x+a$ 이므로 $f'(1)=2+a=1$
$\therefore a=-1$
㉠에서 $b=0$ 이므로 $f(x)=x^2-x$이고
$f(2)=2^2-2=2$

▶ *F_05* **정답 :** -2
$f(x)=x^3-4x+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-4$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ 4)$ 에서의 접선의 기울기는 -1이다. 또, $g(x)=x^2+ax+7$ 로 놓고 접점의 좌표를 $(t,\ g(t))$ 라 하면 $g'(t)=2t+a=-1$
$\therefore\ a+1=-2t$ ……㉠
또한, 두 점 $(-1,\ 4),\ (t,\ t^2+at+7)$ 을 지나는 직선의 기울기가 접선의 기울기 -1 과 같으므로
$\frac{t^2+at+7-4}{t-(-1)}=-1$, $t^2+(a+1)t+4=0$ ……㉡
㉠, ㉡ 에서 $t^2-2t\cdot t+4=0$, $t^2=4\ \therefore\ t=\pm 2$
$t=2$ 일 때 $a=-5$, $t=-2$ 일 때 $a=3$
따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $-5+3=-2$ 이다.

▶ *F_06* **정답 :** (1) 2 (2) 2
(1) $y=-x^3+3x^2+2x$ 에서 $f'(x)=-3x^2+6x+2$
$f'(0)=2$이므로 원점 O에서의 접선의 기울기는 2이다. 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되려면 점 P에서의 접선의 기울기가 2이어야 한다.
점 P의 x 좌표를 $t\ (t\neq 0)$라 하면
$f'(t)=-3t^2+6t+2=2,\ 3t(t-2)=0\ \therefore t=2$
(2) $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 $g(4)=1$ 이면 $f(1)=4$ 이다.
따라서 $y=g(x)$ 위의 점 $(4,\ 1)$ 에서의 접선은 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 4)$ 에서의 접선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭시킨 직선이다.
한편, $f'(x)=3x^2-2x+3$ 이므로 $f'(1)=4$
따라서 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식은 $y=4(x-1)+4$이므로 $y=4x$
$y=4x$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동시키면 $y=\frac{1}{4}x$ 이므로 $h(x)=\frac{1}{4}x$ 이고 $h(8)=2$ 이다.

▶ *F_07* **정답 :** 6
다항함수 $f(x)$가 실수 전체에서 미분가능하고, $x+2$도 실수 전체에서 미분가능하므로
함수 $g(x)=(x+2)f(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고, 열린 구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하다.
$f(-1)=2,\ f(2)=5$이고 $g(x)=(x+2)f(x)$이므로
평균값 정리에 의하여
$\frac{g(2)-g(-1)}{2-(-1)}=\frac{4f(2)-f(-1)}{3}$
$=\frac{4\times 5-2}{3}=6=g'(c)$
를 만족시키는 c가 열린 구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값 a에 대하여 $g'(a)$의 값은 6이다.

▶ *F_08* **정답 :** 4
모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하다.
따라서 평균값의 정리에 의하여
$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)\ \ (0<c<1)$
를 만족시키는 c가 적어도 하나 존재한다.
그런데 조건 (가)에서 $|f'(c)|\leq 3$이므로
$\left|\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\right|\leq 3,\ |f(1)-2|\leq 3$ ($\because$ 조건 (나))
$-3\leq f(1)-2\leq 3,\ -1\leq f(1)\leq 5$
따라서 $f(1)$의 최댓값과 최솟값은 각각 $5,\ -1$이므로 구하는 합은 $5-1=4$이다.

G. 도함수의 활용 (2)

▶ **G_01 정답 :** (1) 4 (2) 21

(1) 함수 $f(x)=x^3+ax^2+ax+1$이 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+ax+1$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+a$이므로
모든 실수 x에 대하여 $3x^2+2ax+a\ge 0$
이차방정식 $3x^2+2ax+a=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-3\times a\le 0,\ a(a-3)\le 0\ \ \therefore 0\le a\le 3$
따라서 정수 a는 $0,\ 1,\ 2,\ 3$의 4개다.
(2) $f(x)=-x^3+x^2+ax$에서 $f'(x)=-3x^2+2x+a$
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 증가하려면
$1<x<3$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.
즉, $y=f'(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 이차함수이므로 $f'(1)\ge 0$, $f'(3)\ge 0$을 만족시키면 된다.
ⅰ) $f'(1)=-3+2+a\ge 0$에서 $a\ge 1$
ⅱ) $f'(3)=-27+6+a\ge 0$에서 $a\ge 21$
ⅰ), ⅱ)에서 실수 a의 값의 범위는 $a\ge 21$이므로 a의 최솟값은 21이다.

▶ **G_02 정답 :** ⑤

ㄱ. 열린 구간 $(a,\ b)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(a,\ b)$에서 증가한다. (참)
ㄴ. $g(x)=f(x)-x$라 하면 $g'(x)=f'(x)-1$이므로 $y=g'(x)$의 그래프는 그림과 같다.
$y=g'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하면 $\alpha\le c<d\le\beta$이고
$\beta-\alpha<b-a$이므로 $d-c<b-a$이다. (참)
ㄷ. $h(x)=f(x)-2x$라 하면 $h'(x)=f'(x)-2$이므로 $y=h'(x)$의 그래프는 그림과 같다.
즉, 모든 실수 x에서
$h'(x)=f'(x)-2\le 0$이므로
함수 $y=f(x)-2x$는 실수 전체의 집합에서 감소한다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

▶ **G_03 정답 :** (1) 16 (2) 3 (3) 10

(1) $g(x)=(x^3+2)f(x)$에서
$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$
함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가지므로
$g(1)=3f(1)=24$에서 $f(1)=8$
$g'(1)=3f(1)+3f'(1)=0$에서
$3\times 8+3f'(1)=0,\ f'(1)=-8$
$\therefore\ f(1)-f'(1)=8-(-8)=16$
(2) $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로 $f'(-1)=3-2a+b=0$
$\therefore\ 2a-b=3$ …… ㉠
또한, 극댓값이 35이므로
$f(-1)=-1+a-b+30=35$
$\therefore\ a-b=6$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-9$
따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x+30$이고
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)$
$=3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 극솟값은 $f(3)=27-27-27+30=3$
(3) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 -6을 가지므로 $x=-2$에서 극솟값 -6을 갖고, $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 상수)로 놓으면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로
$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$
$=(-x)^4+a(-x)^3+b(-x)^2+c(-x)+d$
$2ax^3+2cx=0\ \ \therefore\ a=c=0$
$f(x)=x^4+bx^2+d$에서 $f'(x)=4x^3+2bx$이므로
$f(2)=2^4+b\times 2^2+d=-6,\ 4b+d=-22$
$f'(2)=4\times 2^3+2b\times 2=0,\ 32+4b=0$
$\therefore\ b=-8,\ d=10$
따라서 함수 $f(x)=x^4-8x^2+10$의 극댓값은 $f(0)=10$

▶ **G_04 정답 :** (1) 7 (2) $-\frac{1}{3}<k<1$

(1) 삼차함수가 극댓값을 가지면 극솟값도 가지므로
$f(x)=x^3+ax^2+2ax+3$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+2a$
방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=a^2-6a>0,\ a(a-6)>0$
$a<0$ 또는 $a>6$
따라서 구하는 자연수 a의 최솟값은 7이다.
(2) 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지면 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
$f(x)=x^3+kx^2+(k-2)x+3$에서
$f'(x)=3x^2+2kx+(k-2)$
따라서 이차방정식 $f'(x)=0$은 $-1<x<1$인 범위에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
ⅰ) 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4}=k^2-3(k-2)=k^2-3k+6>0$ …… ㉠
㉠은 항상 성립하는 부등식이다.

ii) $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{k}{3}$

이므로 $-1<-\frac{k}{3}<1$ 에서 $-3<k<3$

iii) $f'(-1)=-k+1>0$ 에서 $k<1$

iv) $f'(1)=3k+1>0$에서 $k>-\frac{1}{3}$

i)~iv)에서 $-\frac{1}{3}<k<1$

▶ *G_05* **정답 :** (1) 4 (2) $0<a\le 4$

(1) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 일대일 대응이어야 한다. 이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$는 증가해야 한다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이 성립해야 한다.

$f'(x)=3x^2-2ax+a$에서 $3x^2-2ax+a\ge 0$

이차방정식 $3x^2-2ax+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a\le 0$, $a(a-3)\le 0$ $\therefore 0\le a\le 3$

따라서 정수 a는 0 ,1, 2, 3의 4개다.

(2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+(a-2)x^2+ax+1$에서

$f'(x)=x^2+2(a-2)x+a$

함수 $f(x)$가 $x\le 0$에서 극값을 갖지 않으려면 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않거나 $x>0$에서만 극값을 가져야 한다.

$f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

i) 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는 경우

방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-a\le 0$, $(a-1)(a-4)\le 0$,

$1\le a\le 4$

ii) 함수 $f(x)$가 $x>0$에서만 극값을 갖는 경우

방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로 $\frac{D}{4}=(a-2)^2-a>0$

$(a-1)(a-4)>0$, $a<1$ 또는 $a>4$ …… ㉠

(두 근의 합)$=-2(a-2)>0$에서 $a<2$ …… ㉡

(두 근의 곱)$=a>0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $0<a<1$

i), ii)에서 $0<a\le 4$

▶ *G_06* **정답 :** (1) -3 (2) 184

(1) $f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ 이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	↘	$a-4$	↗	$a+16$

함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 $a-4$를 갖고, $x=4$일 때 최댓값 $a+16$을 갖는다. 따라서 $m=a-4$, $M=a+16$이므로

$M+m=(a+16)+(a-4)=6$ $\therefore a=-3$

(2) $f(x)=2x^3-3x^2+5(-1\le x\le 1)$에서

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	5	↘	4

따라서 $f(x)=t$로 놓으면 $0\le t\le 5$이므로

$y=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(t)=2t^3-3t^2+5$

$y'=6t^2-6t=6t(t-1)$이므로

$y'=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

함수 $f(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	5	↘	4	↗	180

따라서 $f(t)$는 $t=1$에서 최소, $t=5$에서 최대이므로 구하는 최솟값은 $m=f(1)=4$,

최댓값은 $M=f(5)=180$

따라서 $M+m=180+4=184$이다.

▶ *G_07* **정답 :** $\frac{16\sqrt{3}}{9}$

선분 AB 의 길이는 $(-3t^2+5)-(t^2+1)=-4t^2+4$

선분 CA 의 길이는 $2t$ 이므로 사각형 ABDC 의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$S(t)=2t(-4t^2+4)=-8(t^3-t)$,

$S'(t)=-8(3t^2-1)$

$S'(t)=0$ 에서 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(\because 0<t<1)$

함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	(1)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은

$S\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-8\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{16\sqrt{3}}{9}$

▶ *G_08* **정답 :** (1) 15 (2) 2

(1) $x^3-7=12x+a$에서 $x^3-12x-7=a$

$f(x)=x^3-12x-7$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

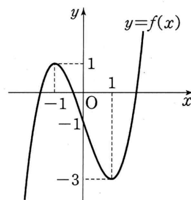
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	9	↘	-23	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다. 방정식 $f(x)=a$가 서로 다른 두 개의 음의 근과 한 개의 양의 근을 가지려면 $-7<a<9$ 이어야 하므로 정수 a는 $-6,\ -5,\ -4,\ \cdots, 8$ 이고 그 합은 $7+8=15$이다.

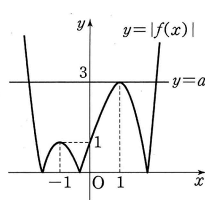
(2) $f(x)=x^3-3x-1$에서
$f'(x)=3x^2-3$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-1$, $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다. 방정식 $|f(x)|=a$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다. 그런데 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 2]와 같으므로 직선 $y=a$와 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 자연수 a의 값은 2이다.



[그림 1]



[그림 2]

▶ *G_09* **정답 :** (1) 13 (2) 31

(1) $f(x)=2x^3+3x^2-12x-a$로 놓으면
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$
삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면
$f(-2)\cdot f(1)=0$ 이어야 하므로
$(20-a)(-7-a)=0$
따라서 $a=20$ 또는 $a=-7$이므로
그 합은 $20+(-7)=13$

(2) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 따라서
$F(x)=f(x)-g(x)=x^3+3x^2-9x-a$로 놓으면
$F'(x)=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)$
$=3(x+3)(x-1)$
$F'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
삼차방정식 $F(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면
$F(-3)\cdot F(1)<0$이어야 하므로
$(27-a)(-5-a)<0$, $(a+5)(a-27)<0$
$\therefore\ -5<a<27$
따라서 구하는 정수 a는 $-4,\ -3,\ \cdots,\ 26$의 31개다.

▶ *G_10* **정답 :** 5

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면
$h(x)=4x^3-3x^2-(6x-a)=4x^3-3x^2-6x+a$
$h'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$
$h'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$
함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$a-1$	↗	$a+\frac{7}{4}$	↘	$a-5$	↗	$a+8$

$-1\le x\le 2$에서 함수 $h(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최솟값을 가지므로 주어진 부등식을 만족 시키려면
$h(1)=a-5\ge 0$ 즉, $a\ge 5$
따라서 실수 a의 최솟값은 5이다.

▶ *G_11* **정답 :** (1) ③ (2) ③ (3) ③

(1) ㄱ. $f'(x)=3x^2+2ax+3$이므로 $f'(0)=3$ (참)
ㄴ. $f(x)=x^3-3x^2+3x+5$에서
$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\ge 0$이므로
함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다. (거짓)
ㄷ. $f'(x)=3x^2+2ax+3$에서
이차방정식 $3x^2+2ax+3=0$의 판별식을 D라 하면
$|a|\le 2$ 이므로 $\frac{D}{4}=a^2-9<0$
따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$ 이므로
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

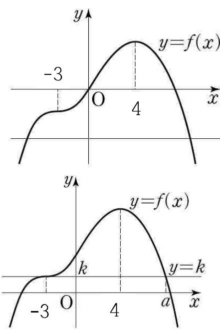
(2) $h(x)=f(x)-g(x)$는 삼차함수이고
$h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로
$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
$h(0)=f(0)-g(0)=0$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.
ㄱ. $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다. (참)
ㄴ. $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. (참)
ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

(3) ㄱ. 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값을 가진다. (참)

ㄴ. [반례] $f(-3)<0$, $f(4)>0$ 일 때, $f(-3)f(4)<0$이므로 $f(4)>f(-3)f(4)$이다. (거짓)



ㄷ. 다음은 $f(-3)=f(a)=k$일 때, 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 그래프이다. $a>4$이므로 $-a<-4$이다. 따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-a,\ \infty)$에서 최댓값 $f(4)$를 가진다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

▶ $\mathcal{G}$_12 **정답 :** (1) 6 (2) 36 (3) $\frac{1}{2}<t<4$

(1) $x=t^3+pt^2+qt$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면 $v=\frac{dx}{dt}=3t^2+2pt+q$
$t=2$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로
$3\times2^2+2p\times2+q=0$, $4p+q=-12$ ⋯⋯㉠
또한, $t=2$에서 점 P의 위치가 -4이므로
$2^3+p\times2^2+q\times2=-4$, $2p+q=-6$ ⋯⋯㉡
㉠, ㉡에서 $p=-3$, $q=0$이고, 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면 $a=\frac{dv}{dt}=6t+2p=6t-6$
따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $6\times2-6=6$
(2) $x_1(t)=x_2(t)$ 에서 $t^3+2t=7t^2-4t$
$t^3-7t^2+6t=0$, $t(t-1)(t-6)=0$
∴ $t=0$ 또는 $t=1$ 또는 $t=6$
따라서 두 점 P, Q가 원점을 동시에 출발한 후 두 번째로 만나는 순간은 $t=6$일 때이다.
$x_1(t)=t^3+2t$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도는 각각 $v_1(t)=3t^2+2$, $a_1(t)=6t$ 이므로
$t=6$일 때의 점 P의 가속도는 $a=6\times6=36$
(3) 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치가 각각 $f(t)=2t^2-2t$, $g(t)=t^2-8t$이므로 시각 t일 때, 두 점 P, Q의 속도는 각각 $f'(t)=4t-2$, $g'(t)=2t-8$
두 점 P와 Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $f'(t)$와 $g'(t)$의 부호가 반대가 되므로
$f'(t)g'(t)=(4t-2)(2t-8)<0$
$4(2t-1)(t-4)<0$ ∴ $\frac{1}{2}<t<4$

▶ $\mathcal{G}$_13 **정답 :** ⑤

ㄱ. 두 점 A, B는 $f(t)=g(t)$일 때 만나므로 $t=b$, $t=e$일 때 만난다. 즉, 두 점 A, B는 $0<t<10$에서 두 번 만난다. (참)
ㄴ. $b<t<e$에서 $g(t)>f(t)$이므로 점 B는 점 A의 오른쪽에 있다. (참)
ㄷ. $d<t<e$에서 $f'(t)>0$이고 $g'(t)<0$이므로 두 점 A, B는 $d<t<e$에서 서로 반대 방향으로 움직인다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

$\mathcal{H}$. 부정적분과 정적분

▶ $\mathcal{H}$_01 **정답 :** (1) $\frac{8}{3}$ (2) -3 (3) 2

(1) $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(3x^2-8x)\right\}dx=3x^2-8x+C$
(C는 적분상수)
이때, $f(1)=3-8+C=-2$이므로 $C=3$
따라서 $f(x)=3x^2-8x+3$이고 방정식 $f(x)=0$은 판별식 $D/4=4^2-3\times3>0$에서 서로 다른 두 실근을 가지므로 $f(x)=0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8}{3}$이다.
(2) 부정적분의 정의에 따라 $f(x)=F'(x)$이므로
$F(x)=xf(x)-\frac{1}{3}x^3+2x^2+k$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=F'(x)=f(x)+xf'(x)-x^2+4x$,
따라서 $f'(x)=x-4$
$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x-4)dx=\frac{1}{2}x^2-4x+C$
(C는 적분상수)이고 $f(0)=3$이므로 $C=3$
따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+3$이고 $f(2)=-3$
(3) $g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=x^2+f(x)$ ⋯⋯㉠
또 $f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$에서 $f(x)$가 이차함수이고 $f(x)g(x)$가 사차함수이므로 $g(x)$도 이차함수이다.
따라서 $g'(x)$는 일차함수이므로 $g'(x)=x^2+f(x)$가 성립하려면 $f(x)$의 이차항의 계수가 -1이어야 한다.
따라서 $f(x)=-x^2+ax+b$(a,b는 상수)라 하면
$g'(x)=ax+b$ 이고 $g(x)=\frac{a}{2}x^2+bx+C$
(C는 적분상수)
$f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$이므로
$(-x^2+ax+b)\left(\frac{a}{2}x^2+bx+C\right)=-2x^4+8x^3$
양변의 계수를 비교하면 $a=4, b=0, C=0$
따라서 $g(x)=2x^2$이므로 $g(1)=2$

▶ $\mathcal{H}$_02 **정답 :** (1) 2 (2) 2

(1) $f'(x)=ax(x-2)$ $(a>0)$라 하면
$f'(1)=a(1-2)=-2$이므로 $a=2$
∴ $f'(x)=2x^2-4x$
$f(x)=\int(2x^2-4x)dx=\frac{2}{3}x^3-2x^2+C$
(C는 적분상수)
$f(1)=\frac{2}{3}-2+C=\frac{2}{3}$이므로 $C=2$이다.
따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+2$이고 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=2$이다.

(2) $f'(x)=x^2-2x+a$이므로

$$f(x)=\int(x^2-2x+a)dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax+C$$

(C는 적분상수)

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0)=C=0$이고

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax$이다.

이때 $f'(x)=x^2-2x+a=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=a$이고, 극댓값과 극솟값의 합은 $f(\alpha)+f(\beta)$이다.

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=8-6a$,

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4-2a$이므로

$$f(\alpha)+f(\beta)=\frac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha^2+\beta^2)+a(\alpha+\beta)$$

$$\frac{8}{3}=\frac{1}{3}(8-6a)-(4-2a)+2a,\ 2a=4\ \therefore a=2$$

▶ *H_03* 정답 : (1) 8 (2) $\frac{26}{3}$

(1) 닫힌 구간 $[2,\ 5]$을 n등분하여 그림과 같이 직사각형을 만들면 직사각형 한 개의 가로의 길이는 $\frac{5-2}{n}=\frac{3}{n}$, 세로의 길이는 $\left(2+k\times\frac{3}{n}\right)^3$이므로

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^3\frac{3}{n}$$

따라서 $a=2$, $b=3$, $c=3$ 이고 $a+b+c=8$

(2) 정적분의 정의에서 $f(x)=x^2$, $a=1$, $b=3$인 경우이므로 $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n}$, $x_k=a+k\Delta x=1+\frac{2k}{n}$이다.

$$\int_1^3 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{4k}{n}+\frac{4k^2}{n^2}\right)\frac{2}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{n}+\frac{8k}{n^2}+\frac{8k^2}{n^3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}1+\frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\times n+\frac{8}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{8}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$=2+\frac{8}{2}+\frac{16}{6}=\frac{26}{3}$$

▶ *H_04* 정답 : (1) 6 (2) 1 (3) 13

(1) $\int_0^1(3x^2-2x+1)\,dx-\int_2^1(3x^2-2x+1)\,dx$

$$=\int_0^1(3x^2-2x+1)\,dx+\int_1^2(3x^2-2x+1)\,dx$$

$$=\int_0^2(3x^2-2x+1)\,dx=\Big[x^3-x^2+x\Big]_0^2=6$$

(2) $|x^2-x|=\begin{cases}-x^2+x & (0\le x\le 1)\\ x^2-x & (1\le x\le 2)\end{cases}$

$$\int_0^2|x^2-x|\,dx=\int_0^1(-x^2+x)\,dx+\int_1^2(x^2-x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left\{\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right\}=1$$

(3) 함수 $f'(x)$를 각 구간별로 나누어 적분하면

$f(x)=\begin{cases}4x+C_1 & (x<1)\\ 3x^2+2x+C_2 & (x>1)\end{cases}$ (C_1, C_2는 적분상수)

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to1-}(4x+C_1)=\lim_{x\to1+}(3x^2+2x+C_2)=5$$

$4+C_1=5+C_2=5$이므로 $C_1=1$, $C_2=0$

따라서 $f(x)=\begin{cases}4x+1 & (x<1)\\ 3x^2+2x & (x\ge1)\end{cases}$

$$\therefore\ \int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(4x+1)dx+\int_1^2(3x^2+2x)dx$$

$$=\Big[2x^2+x\Big]_0^1+\Big[x^3+x^2\Big]_1^2=13$$

▶ *H_05* 정답 : (1) $\frac{2}{3}$ (2) 11 (3) 12

(1) $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}x^2dx+2\int_{-1}^{1}xdx+\int_{-1}^{1}1dx$$

$$=2\int_0^1x^2dx+0+2\int_0^1 1dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+2\Big[\ x\ \Big]_0^1=\frac{8}{3}$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x+1)dx=\int_{-1}^{1}xdx+\int_{-1}^{1}1dx$$

$$=0+2\int_0^1 1dx=2\Big[\ x\ \Big]_0^1=2$$

따라서 $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-1}^{1}f(x)dx\right)^2$ 에서

$\frac{8}{3}=4k$ 이므로 $k=\frac{2}{3}$ 이다.

(2) $f(-x)=-f(x)$이므로 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$

$$\int_{-3}^{2}f(x)\,dx=\int_{-3}^{-2}f(x)\,dx+\int_{-2}^{2}f(x)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{-2}f(x)\,dx+0=5$$

에서 $\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx = 5$이므로

$$\int_{-3}^{4} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-2} f(x)\,dx + \int_{-2}^{4} f(x)\,dx$$
$$= 5+6 = 11$$

(3) 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 도함수 $y=f'(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.
또, $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 2, $x=1$에서 극솟값 -2를 가진다. 따라서 $-1 \le x \le 1$에서 함수 $f(x)$가 감소하므로 $f'(x) \le 0$이다.

$$\int_{-1}^{1} (2x+3)|f'(x)|dx = -\int_{-1}^{1} (2x+3)f'(x)dx$$
$$= -2\int_{-1}^{1} xf'(x)dx - 3\int_{-1}^{1} f'(x)dx$$
$$= 0 - 3\int_{-1}^{1} f'(x)dx$$

($\because y = xf'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭)

$$= -3\{f(1)-f(-1)\} = -3(-2-2) = 12$$

▶ *H_06* **정답 :** (1) 10 (2) 24

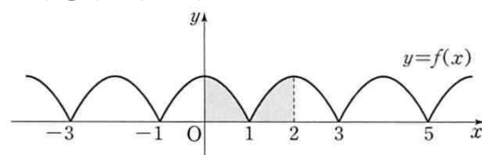
(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx = 13$$
$$\therefore \int_{0}^{a} f(x)dx = \frac{13}{2}$$

한편 주어진 그래프에서 $\int_{0}^{3} f(x)dx = \frac{1}{2}+1+\frac{1}{2} = 2$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_{0}^{a} f(x)dx = \frac{13}{2} = 6+\frac{1}{2} = 3\times 2+\frac{1}{2}$$
$$= 3\int_{0}^{3} f(x)dx + \frac{1}{2} = \int_{0}^{9} f(x)dx + \int_{9}^{10} f(x)dx$$
$$\left(\because \int_{9}^{10} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx\right)$$
$$= \int_{0}^{10} f(x)dx \qquad \therefore a = 10$$

(2) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 또한 $f(x+2)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$는 2의 간격으로 같은 모양이 반복된다. 따라서 그래프의 한 예로 다음과 같이 생각할 수 있다.



$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 3$이므로 위의 그림에서 어두운 부분의 넓이는 3이다.

$$\int_{0}^{6} f(x)\,dx = 3\times\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 9,$$
$$\int_{0}^{10} f(x)\,dx = 5\times\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 15\text{이므로}$$
$$\int_{-6}^{10} f(x)\,dx = \int_{-6}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{10} f(x)\,dx$$
$$= \int_{0}^{6} f(x)\,dx + \int_{0}^{10} f(x)\,dx = 9+15 = 24$$

▶ *H_07* **정답 :** $\frac{7}{3}$

두 함수 $y=f(x)$와 $y=f(-x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(-x)\,dx$이다.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$
$$= \int_{0}^{1} f(-x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$
$$= \int_{0}^{1} \{f(-x)+f(x)\}\,dx$$
$$= \int_{0}^{1} (x^2+2)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1 = \frac{7}{3}$$

▶ *H_08* **정답 :** (1) 6 (2) 9 (3) $\frac{2}{3}$ (4) 18

(1) $f(2) = \int_{2}^{2} (t^3+t^2-3t)dt = 0$이므로 $y=f(x)$는 점 $(2, 0)$을 지난다. $\therefore a=0$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{2}^{x} (t^3+t^2-3t)dt = x^3+x^2-3x$$

이므로 $x=2$일 때의 접선의 기울기 b는
$b = 2^3+2^2-3\times 2 = 6 \quad \therefore a+b = 0+6 = 6$

(2) $xf(x) = 3x^2 + \int_{1}^{x} f(t)dt \quad \cdots\cdots$㉠

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $f(1) = 3+\int_{1}^{1} f(t)dt$

$\therefore f(1) = 3$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)+xf'(x) = 6x+f(x)$, $f'(x) = 6$
$f(x) = \int 6dx = 6x+C$ (C는 적분상수)
$f(1) = 6+C = 3$에서 $C=-3$
따라서 $f(x) = 6x-3$이므로 $f(2) = 12-3 = 9$

(3) $\int_{0}^{1} f(t)dt = k$ (k는 상수)라 하면

$$\int_{0}^{x} f(t)dt = x^3-2x^2-2kx \quad \cdots\cdots㉠$$

㉠에 $x=1$을 대입하면 $k = \int_{0}^{1} f(t)dt = 1-2-2k$

$$\therefore k = -\frac{1}{3}$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4x-2k=3x^2-4x+\frac{2}{3}$

따라서 $f(0)=\frac{2}{3}$

(4) $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=\int_0^x xf(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt$

$=x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=2x^3-3x^2$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=6x^2-6x$

$\int_0^x f(t)\,dt=6x^2-6x$

또, 위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x-6$이므로 $f(2)=18$

▶ **$\mathcal{H}$_09 정답 :** (1) 10　(2) $\frac{5}{4}$　(3) 6

(1) $F'(t)=f(t)=3t^2+at-5$라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(3t^2+at-5)dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)=f(1)=3+a-5=8$

$\therefore a=10$

(2) $\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x+2)(x-2)}\int_2^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt=\frac{1}{4}f(2)$

$=\frac{1}{4}(4+4-3)=\frac{5}{4}$

(3) $F'(x)=f(x)=2x^2-3x$로 놓으면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_2^{2+3h}f(x)\,dx=\lim_{h\to0}\frac{F(2+3h)-F(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+3h)-F(2)}{3h}\times3=3F'(2)=3f(2)$

$=3(2\times2^2-3\times2)=6$

▶ **$\mathcal{H}$_10 정답 :** (1) 12　(2) 30　(3) $\frac{7}{4}$　(4) 61

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{3k}{n}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n}$

$=\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^3(3x^2-ax)dx$

$=\frac{1}{3}\left[x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^3=9-\frac{3}{2}a$

$f(1)=3-a$이므로 $9-\frac{3}{2}a=3-a$　$\therefore a=12$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3+\left(1+\frac{4}{n}\right)^3+\left(1+\frac{6}{n}\right)^3+\cdots+\left(1+\frac{2n}{n}\right)^3\right\}$

$=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3\frac{2}{n}=\frac{3}{2}\int_1^3 x^3dx=\frac{3}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3$

$=\frac{3}{2}\left(\frac{81}{4}-\frac{1}{4}\right)=30$

(3) $\sum_{k=1}^n\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$

$=\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{0}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}+\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$

$+\left\{f\left(\frac{3}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right\}\frac{3}{n}+\cdots+\left\{f\left(\frac{n}{n}\right)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}\frac{n}{n}$

$=-\left\{f\left(\frac{0}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}+f(1)$

$=f(1)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=3-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}=3-\int_0^1 f(x)dx$

$=3-\int_0^1(x^3+2x)dx=3-\left[\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_0^1$

$=3-\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{7}{4}$

(4) $x_{k-1}=\frac{k-1}{n}$,　$x_k=\frac{k}{n}$이고 네 점 $(x_{k-1},0)$, $(x_k,0)$, $(x_k,1)$, $(x_{k-1},g(x_{k-1}))$을 꼭짓점으로 하는 사각형은 사다리꼴이므로 $S_k=\frac{1}{2}\left\{1+g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n S_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{2}\left\{1+g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

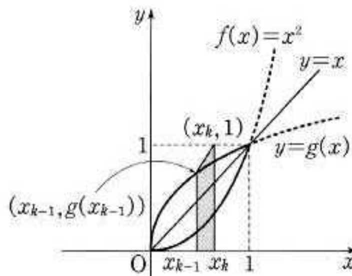
$=\frac{1}{2}\int_0^1\{1+g(x)\}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 1dx+\frac{1}{2}\int_0^1 g(x)dx$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^1 x^2dx\right)=1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx$

$=1-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

따라서 $p=6$, $q=5$이므로

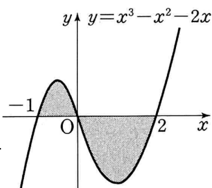
$p^2+q^2=6^2+5^2=61$



I. 정적분의 활용

▶ *I_01* **정답 :** (1) $\frac{37}{12}$ (2) 48 (3) 40

$y=x^3-x^2-2x=x(x+1)(x-2)$
이고 $x(x+1)(x-2)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 함수 $y=x^3-x^2-2x$의 그래프는 그림과 같다. 따라서 구하는 넓이를 S라 하면



$S=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx-\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{2}$

$=\left\{0-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)\right\}-\left\{\left(4-\frac{8}{3}-4\right)-0\right\}$

$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$

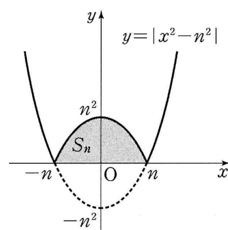
(2) 곡선 $y=x^2-n^2$은 y축에 대하여 대칭이고 $y=|x^2-n^2|$의 그래프는 그림과 같다.

$S_n=2\int_{0}^{n}|x^2-n^2|dx$

$=2\int_{0}^{n}(n^2-x^2)dx$

$=2\left[n^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{n}$

$=2\left(n^3-\frac{1}{3}n^3\right)=\frac{4}{3}n^3$



$\therefore \sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{8}n=\frac{4}{3}\times\left(\frac{8\times 9}{2}\right)=48$

(3)

$\int_{0}^{2013}f(x)dx=\int_{0}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{2013}f(x)dx=\int_{3}^{2013}f(x)dx$

에서 $\int_{0}^{3}f(x)dx=0$이다.

이때 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(3)=0$이므로 $f(x)=(x-3)(x-a)$(a는 상수)로 놓으면

$\int_{0}^{3}f(x)dx=\int_{0}^{3}(x-3)(x-a)dx$

$=\int_{0}^{3}\{x^2-(a+3)x+3a\}dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a+3}{2}x^2+3ax\right]_{0}^{3}=\frac{9}{2}a-\frac{9}{2}=0$

$\therefore a=1,\ f(x)=(x-3)(x-1)$

방정식 $f(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$이므로
곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$S=\int_{1}^{3}|(x-1)(x-3)|dx$

그런데 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 $f(x)\le 0$이므로

$S=\int_{1}^{3}-(x-1)(x-3)dx=\int_{1}^{3}(-x^2+4x-3)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_{1}^{3}$

$=(-9+18-9)-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)=\frac{4}{3}$

$\therefore 30S=30\times\frac{4}{3}=40$

▶ *I_02* **정답 :** 9

$\int_{0}^{\sqrt{k}}(k-y^2)dy=\left[ky-\frac{1}{3}y^3\right]_{0}^{\sqrt{k}}=k\sqrt{k}-\frac{k\sqrt{k}}{3}$

$=\frac{2}{3}k\sqrt{k}=18$

$k\sqrt{k}=27$, $k^3=3^6$ $\quad\therefore k=9$

▶ *I_03* **정답 :** (1) 9 (2) $\frac{8}{3}$ (3) 13

(1) 두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=-x^2+4$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=-x^2+4$ 에서
$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$
$x=-1$ 또는 $x=2$
닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 $-x^2+4\ge x^2-2x$이므로 구하는 도형의 넓이 S는

$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2+4)-(x^2-2x)\}dx$

$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=9$

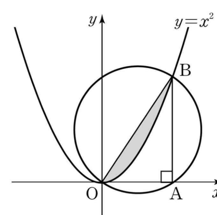
(2) $y=x^2-2x+3$에서 $y'=2x-2$이므로 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 2이다. 곡선 $y=x^2-2x+3$위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은 $y-3=2(x-2)$에서 $y=2x-1$이고 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $2x-1\le x^2-2x+3$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{0}^{2}\{(x^2-2x+3)-(2x-1)\}dx$

$=\int_{0}^{2}(x^2-4x+4)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{0}^{2}$

$=\frac{8}{3}-8+8=\frac{8}{3}$

(3) $\angle\mathrm{OAB}=90^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{OB}}$는 원 C의 지름이다. 따라서 공통부분의 넓이는 반원의 넓이에서 오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이를 뺀 값과 같다.
이때, 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}$이고 직선 OB의 방정식은 $y=tx$이므로



$S(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}\right)^2\pi-\int_0^t(tx-x^2)dx$

$=\frac{\pi}{8}(t^2+t^4)-\left[\frac{t}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^t=\frac{\pi}{8}(t^2+t^4)-\frac{1}{6}t^3$

$S'(t)=\frac{\pi}{8}(2t+4t^3)-\frac{1}{2}t^2$이므로 $S'(1)=\frac{3\pi-2}{4}$

따라서 $p=3$, $q=-2$이므로 $p^2+q^2=13$

▶ *I_04* **정답 :** (1) $\frac{25}{2}$ (2) 9

(1) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다. 이때 $f(2)=0$에서 $f(-2)=0$이고, $f(0)=f(-0)=-f(0)$에서 $f(0)=0$
또 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x(x+2)(x-2)$로 놓을 수 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x(x+2)(x-2)=x$에서

$x^3-4x=x$, $x^3-5x=0$, $x(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$

$\therefore x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{5}$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=2\int_0^{\sqrt{5}}\{x-(x^3-4x)\}dx=2\int_0^{\sqrt{5}}(-x^3+5x)dx$

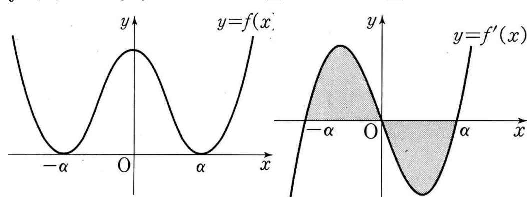
$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{5}}=2\left(-\frac{25}{4}+\frac{25}{2}\right)=\frac{25}{2}$

(2) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이고, 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극솟값 0을 가지므로 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$으로 놓을 수 있다. 이때 $\beta=-\alpha$이므로

$f(x)=(x-\alpha)^2(x+\alpha)^2=(x^2-\alpha^2)^2=x^4-2\alpha^2x^2+\alpha^4$

$f'(x)=4x^3-4\alpha^2x=4x(x+\alpha)(x-\alpha)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\alpha$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\alpha$



곡선 $y=f'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 32이고 곡선 $y=f'(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-\alpha}^0 f'(x)dx=[f(x)]_{-\alpha}^0=16$$

$f(0)-f(-\alpha)=16$, $\alpha^4=16$ $\therefore \alpha=2$ ($\because \alpha>0$)

따라서 $f(x)=x^4-8x^2+16$이고 $f(1)=9$

▶ *I_05* **정답 :** (1) 3 (2) $-1+\sqrt{3}$ (3) $\frac{3}{4}$

(1) 두 부분 A, B의 넓이가 같으므로

$\int_0^k(-3x^2+6x)dx=[-x^3+3x^2]_0^k$

$=-k^3+3k^2=-k^2(k-3)=0$

에서 $k>2$이므로 $k=3$

(2) $y=x^2-ax$의 그래프가 $x=\frac{a}{2}$에 대칭이므로

$S_A=-\int_0^a(x^2-ax)dx=-2\int_{\frac{a}{2}}^a(x^2-ax)dx$

이때 $\frac{S_A}{2}=S_B$이므로

$-\int_{\frac{a}{2}}^a(x^2-ax)dx=\int_a^1(x^2-ax)dx$이다.

따라서 $\int_{\frac{a}{2}}^1(x^2-ax)dx=0$이고

$\int_{\frac{a}{2}}^1(x^2-ax)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right]_{\frac{a}{2}}^1$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a\right)-\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{a}{2}\right)^3-\frac{1}{2}a\times\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}$

$=\frac{1}{12}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}(a-2)(a^2+2a-2)=0$에서

$a=2$ 또는 $a=-1\pm\sqrt{3}$

따라서 $0<a<1$이므로 $a=-1+\sqrt{3}$

(3) $\int_0^2\{4x(x-2)(x-a)-x(x-2)\}dx=0$

이 성립하므로

$\int_0^2[\{4x^3-4(2+a)x^2+8ax\}-(x^2-2x)]dx$

$=\int_0^2\{4x^3-(9+4a)x^2+(8a+2)x\}dx$

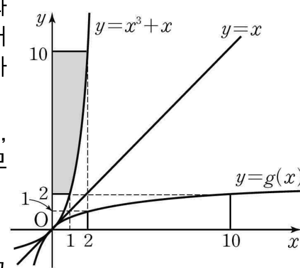
$=\left[x^4-\frac{9+4a}{3}x^3+(4a+1)x^2\right]_0^2$

$=16-\frac{8(9+4a)}{3}+4(4a+1)=0$

$16a-12=0$ $\therefore a=\frac{3}{4}$

▶ *I_06* **정답 :** (1) $\frac{51}{4}$ (2) 2 (3) 1

$y=x^3+x$의 그래프와 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, $y=x^3+x$에서 $x=1$일 때 $y=2$, $x=2$일 때 $y=10$이므로 $g(2)=1$, $g(10)=2$이다. 따라서 $\int_2^{10}g(x)\,dx$의 값은 그림에서 어두운 부분의 넓이와 같으므로



$\int_2^{10}g(x)\,dx=2\times10-\left\{1\times2+\int_1^2(x^3+x)\,dx\right\}$

$=20-2-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=18-\left(4+2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{51}{4}$

(2) $\int_2^3 g(x)dx = 4\times3-1\times2-\int_1^4 f(x)dx$

$=12-2-8=2$

(3) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$f'(x)=3x^2-6x+3$

$=3(x-1)^2 \geq 0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$x^3-3x^2+3x=x$, $x(x-1)(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

이 때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는 S라고 하면

$S=2\int_0^2 |x-f(x)|dx$

$=2\int_0^1 (x^3-3x^2+3x-x)dx$

$+2\int_1^2 \{x-(x^3-3x^2+3x)\}dx$

$=2\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx+2\int_1^2 (-x^3+3x^2-2x)dx$

$=2\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+2\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2=1$

▶ *I_07* **정답 :** (1) 130 (2) 9 (3) ⑤

$v(t)=30-10t=0$, 즉 $t=3$일 때 공의 높이가 최대가 된다.

$\therefore a=30+\int_0^3 (30-10t)dt=30+\left[30t-5t^2\right]_0^3$

$=30+(90-45)=75$

공을 쏘아 올린 지 5초 후의 지면으로부터 공의 높이 b는

$b=30+\int_0^5 (30-10t)dt=30+\left[30t-5t^2\right]_0^5$

$=30+(150-125)=55$

$\therefore a+b=75+55=130$

(2) 점 P가 수직선 위에서 움직이므로 양의 방향과 음의 방향으로 움직인다. 주어진 그림에서 점 P가 방향을 바꾸기 전까지 한 방향으로 움직이므로 원점에서 가장 멀리 떨어지는 경우는 속도가 0인 $t=3$ 또는 $t=6$ 또는 $t=8$일 때이다. $t=3$의 전후에서 속도의 부호가 바뀌므로 점 P가 출발 후 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=3$이다.

$\therefore a=3$

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(3)=0+\int_0^3 v(t)dt=\frac{1}{2}\times3\times4=6$

$x(6)=0+\int_0^6 v(t)dt=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^6 v(t)dt$

$=6-\frac{1}{2}\times3\times4$

$=6-6=0$

$x(8)=0+\int_0^8 v(t)dt=\int_0^6 v(t)dt+\int_6^8 v(t)dt$

$=0+\frac{1}{2}\times2\times4=4$

점 P가 출발 후 원점에서 가장 멀리 떨어져 있을 때는 $t=3$일 때이므로 $b=x(3)=6$

$\therefore a+b=3+6=9$

(3) ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A의 높이는 $0+\int_0^a f(t)dt$, 즉 $\int_0^a f(t)dt$이고, 물체 B의 높이는 $0+\int_0^a g(t)dt$, 즉 $\int_0^a g(t)dt$이다. 그림에서 $\int_0^a g(t)dt<\int_0^a f(t)dt$ 이므로 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다. (참)

ㄴ. 시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 $\left|\int_0^t f(t)dt-\int_0^t g(t)dt\right|=\left|\int_0^t \{f(t)-g(t)\}dt\right|$이다.

이때, $h(t)=f(t)-g(t)$라 하면 닫힌 구간 $[0,\ b]$에서 $g(t)\leq f(t)$이고 닫힌 구간 $[b,\ c]$에서 $f(t)\leq g(t)$이므로 $\int_0^t h(t)dt$는 $t=b$까지 증가하다가 $t=b$부터 감소한다. 따라서 $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다. (참)

ㄷ. $t=c$일 때, 물체 A의 높이는 $\int_0^c f(t)dt$이고 물체 B의 높이는 $\int_0^c g(t)dt$이다.

그런데 $\int_0^c f(t)dt=\int_0^c g(t)dt$이므로 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

MEMO

EBS 2TV
사교육비 경감
교육격차 해소

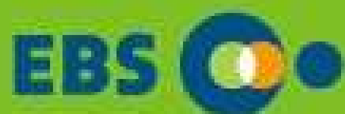


초·중·고 학습 프로그램
맞춤형 실용 영어교육 프로그램
다문화·통일교육 프로그램

시청 방법 | 전국 어디에서나 TV 안테나를 이용, 채널 10-2번으로 시청
※ EBS 홈페이지(www.ebs.co.kr) 및 모바일 앱(EBS TV)으로도 시청 가능

시청 문의 | 1588-1580[ARS ①번 → ⑦번 EBS2TV]





www.ebsi.co.kr

수능개념 수학

명수생의 고급진 레시피
미적분 I



정가 7,500원



시청자센터 & 인터넷 VOD 문의

교재 구입 문의

교재 내용 문의

명수생의 고급진 레시피 미적분 I